ANTON BILIMOVIĆ

VIŠA MATEMATIKA

POJMOVI — PRAVILA — OBRASCI

NOVINSKO-IZDAVAČKO PREDUZEĆE
TEHNIČKA KNJIGA
BEOGRAD 1963

Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd
Bulevar vojvode Mišića 17

SADRŽAJ

Glava treća

DIFERENCIJALNI RAČUN

Glava četvrta

INTEGRALNI RAČUN

Glava peta

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

PRIMENA INTEGRALNOG RAČUNA NA GEOMETRIJU

Glava šesta

KALKULATIVNI PROCESI

PREDGOVOR

U savremenoj matematičkoj literaturi postoji čitav niz knjiga, kratkih i opširnih, u kojima se daje pregled osnovnih pojmova, pravila i obrazaca pojedinih odeljaka Više matematike.

Te knjige su nastale zbog današnje potrebe upoznavanja matematike mnogo šireg kruga ljudi nego što je to ranije bio slučaj.

Do XX veka Viša matematika je bila „visoka nauka", oblast stručnjaka matematičara, koji su se bavili svojim stručnim predmetom radi samog predmeta i njegovih neposrednih primena. Sad je Viša matematika, svojim idejama, pojmovima, metodama, čak i svojom terminologijom imperativno ušla u sve grane tehničkog i širokog praktičkog života.

U svojim prethodnim knjigama, posvećenim Višoj matematici, postavio sam sebi zadatak olakšati prodiranje Više matematike u što šire krugove, s jedne strane, onih, za koje je znanje prvih elemenata Više matematike ne samo obavezno, već i neophodno, sa druge strane, onih, koji nemaju te obaveze, ali svojim istinskim naprednim duhom žele ući svesnije, čak i stvaralački, u svoj svakidašnji rad sa mašinama, čiji je svaki delić ispunjen Mehanikom i Višom matematikom.

U ovoj knjizi iznosim u novoj, sad široko rasprostranjenoj, formi pregled pojmova, pravila i obrazaca Više matematike. Materijal knjige se odnosi samo na matematička fakta, sa kratkim objašnjenjima, bez dokaznog potvrđivanja tog materijala.

Pri izlaganju teksta i ove knjige težio sam da on bude što pristupačniji.

Pri izradi rukopisa mnogo mi je pomogao prof. T. P. Anđelić kome izjavljujem prijateljsku i srdačnu zahvalnost.

P.S. Na nekim mestima ove knjige se pozivam na moje knjige „*Elementi Više matematike*", koje su izašle u izdanju „Tehničke knjige". To su knjige:

I. Funkcija. Izvod. Diferencijal. 1961 g.

II. Diferencijalni račun i njegove primene. 1961 g.

III. Integralni račun sa primenama. Kalkulativni procesi. 1962 g.

IV. Diferencijalne jednačine sa dopunama. 1962 g.

Pri pozivanju, u uglastoj zagradi, rimska cifra označava knjigu, a broj stranu knjige.

Glava prva

BROJ I FUNKCIJA

1.1. Brojevi

Zaustavimo se na pojmu broja proširenom na ove klase brojeva:

realni brojevi, rezultat prebrojavanja ili merenja stvarnom jedinicom (+1),

imaginarni brojevi, uopštavanje rezultata računskih radnji koji se ne izražavaju realnim brojevima i zahtevaju novu, imaginarnu jedinicu ($i = +\sqrt{-1}$), (zbir realnog i imaginarnog broja čini *kompleksni* broj ili *kompleks*).

vektorski brojevi, *trodimenzioni* ili *višedimenzioni* sa jedinicama (i, j, k odnosno i_ν sa $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$, gde je n broj dimenzija), (zbir realnog i trodimenzionog vektorskog broja čini *kvaternion*).

Realni brojevi se dele na ove kategorije:

a. *pozitivni*, *nula* i *negativni* brojevi.

b. *celi* i *razlomljeni* brojevi ili *razlomci*.

Brojevi $1, 2, 3, \ldots$ su *prirodni* brojevi.

Zbir celog i razlomljenog broja je *mešovit* broj ili *nepravi razlomak*. Razlomci mogu biti *obični* $\left(\frac{1}{2}, 7/15, 9:17\right)$ i *decimalni*, i to *konačni* i *beskonačni*. U ovu kategoriju unosimo samo konačne i *beskonačne periodične decimalne razlomke*

$$\left(0{,}5; 3{,}14; 0{,}212121\ldots = 0{,}(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}; \ 2{,}3444\ldots = 2{,}3\,(4) =\right.$$

$$= 2,\frac{34-3}{90} = 2\frac{31}{90}; \; 5,1(23) = 5,\frac{123-1}{990} = 5\frac{122}{990} = 5\frac{61}{495};$$

$$5,12(3) = 5,\frac{123-12}{900} = 5\frac{111}{900} = 5\frac{37}{300}\Big).$$

Brojevi pod a. i b. su *racionalni brojevi*. Racionalni brojevi su rezultati merenja *samerljivih veličina*.

c. *iracionalni brojevi*. Dve veličine, koje nemaju zajedničke mere (primer—strana i dijagonala kvadrata), su *nesamerljive*; njihov odnos se ne izražava racionalnim brojem. Takav odnos je *iracionalan* i izražava se *iracionalnim brojem* (primer: $\sqrt{2}$). Iracionalan broj se izražava *beskonačnim neperiodičnim decimalnim brojem*. Pri izračunavanjima sa iracionalnim decimalnim brojevima uzimaju se njihove približne vrednosti.

Kategorija iracionalnih brojeva se razdvaja u dve podkategorije:

c_1. *algebarski brojevi*. Ako dati broj može da bude rešenje (koren) jednačine, odnosno nula nekog polinoma n-tog stepena sa racionalnim koeficijentima, taj broj je *algebarski*.

Ako takva jednačina ne postoji, broj spada u podkategoriju:

c_2. *transcendentnih brojeva*. Broj π (odnos dužine kružne linije prema prečniku) i e (osnova prirodnih, Neper-ovih logaritama) su transcendentni brojevi.

Prava određenog smera je *osa*. Osa sa na njoj označenom tačkom (početkom koordinate) i jediničnom dužinom za merenje je *brojna skala*. Svakom realnom broju odgovara na brojnoj skali određena tačka; njeno rastojanje od početka, izmereno izabranom jedinicom na jednu (pozitivnu) ili na drugu (negativnu) stranu, određuje *apsolutnu vrednost* i *znak* realnog, odnosno *skalarnog broja*. Veličina koja se meri realnim brojem je *skalarna veličina*.

Pošto proučavanje operacija sa realnim brojevima ulazi čak i u najmanji okvir Elementarne matematike, u ovoj knjizi se zaustavljamo samo na operacijama sa kompleksnim brojevima.

1.2. Kompleksni brojevi

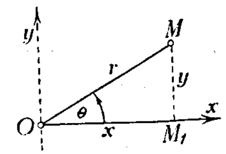
Kompleksni broj se izražava u ovim oblicima:

a. *algebarski oblik kompleksa*: $z = x + yi$, gde su x i y realni brojevi, a i — imaginarna jedinica $i = +\sqrt{-1}$, za koju važe jednačine

$$i^2 = -1, \; i^3 = -i, \; i^4 = +1, \; i^{4n+1} = i, \; i^{4n+2} = -1,$$

$$i^{4n+3} = -i, \; i^{4n} = +1,$$

gde je n ceo broj. Broj x je *realni deo kompleksa* (oznaka $x = Re\,z$), y — je *imaginarni deo* (oznaka $Im z$). Kompleksnom broju $x + yi$ u *Dekartovom koordinatnom sistemu* odgovara tačka (*afiks kompleksa*) sa koordinatama (x, y). Osa Ox (sl. 1) je *realna osa* kompleksa, Oy — *imaginarna*.



Sl. 1 — Dekartove i polarne koordinate

b. *polarni oblik kompleksa*:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

gde su r i θ *polarne koordinate afiksa kompleksa* u polarnom koordinatnom sistemu sa polarnom osom Ox. Koordinata $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$ je *modul kompleksa* i $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ njegov *argument*. Kvadrat modula $r^2 = x^2 + y^2$ je *norma kompleksa*; oznaka norme kompleksa je $N(z)$. Ugao θ se meri brojem bez imenovanja — odnosom luka prema poluprečniku. Jedinični ugao u tom sistemu je *radijan*. Granice u kojim se mogu menjati r i θ su: $0 \leqslant r < \infty$; $-\infty < \theta < +\infty$. Argument θ datog kompleksa ima beskrajno mnogo vrednosti: $\theta + 2k\pi$ (k — ceo broj). Njegova vrednost u granicama $-\pi < \theta \leqslant +\pi$ je *glavna vrednost argumenta*. Broj nula ima modul i normu jednaku nuli, a argument mu je neodređen.

c. *Ajlerov oblik kompleksa* $z = re^{\theta i} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, gde je e osnova prirodnih logaritama (vidi I, 110).

Kompleks $x - yi = \bar{z}$ je *konjugovan* sa kompleksom $x + yi = z$ i obrnuto, $\bar{\bar{z}} = z$.

Osnovne operacije kompleksima

Sabiranje i *oduzimanje*:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = x_1 \pm x_2 + (y_1 \pm y_2)\, i.$$

Množenje dvaju kompleksa; *u algebarskom obliku:*

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)\, i;$$

u polarnom obliku:

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

(Pravilo: moduli se množe, argumenti se sabiraju); u *Ajlerovom obliku:* $z_1 z_2 = r_1 e^{\theta_1 i} \cdot r_2 e^{\theta_2 i} = r_1 r_2 e^{(\theta_1 + \theta_2) i}$ (potvrda prethodnog pravila).

Proizvod dva konjugovana kompleksa jednak je njihovoj normi: $(x + iy)(x - yi) = z\bar{z} = x^2 + y^2 = N(z) = N(\bar{z})$.

Za *deljenje* važi pravilo: moduli se dele, argumenti se oduzimaju,

$$z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Količnik dva kompleksa obično se transformiše u količnik kompleksa i realnog broja:

$$z_1 : z_2 = (x_1 + y_1 i) : (x_2 + y_2 i) = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = (z_1 \bar{z}_2) : N(z_2).$$

Dizanje kompleksa na n-ti stepen:

$$z^n = (re^{\theta i})^n = r^n e^{(n\theta) i} = r^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)].$$

Za $r = 1$ *Moavrov obrazac:*

$$(e^{\theta i})^n = e^{n\theta i} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Prethodni obrasci važe i za slučaj razlomljenog broja n, tj. za slučaj *korenovanja*,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right).$$

Ovaj izraz ima n različitih vrednosti za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Ovde je $\sqrt[n]{r}$ *aritmetički koren* iz pozitivnog broja r i θ_0 glavna vrednost argumenta kompleksa z. Afiksi tih kompleksnih korena dele kružnu liniju poluprečnika r na n jednakih delova.

1.3. Vektorski brojevi

Duž određenog smera je *vektor*. Njegovi elementi su: 1. *Početna tačka*. 2. Prava kroz početnu tačku, *osnova* ili *prava-nosač* vektora. 3. *Smer* od početka na toj pravoj. 4. Dužina duži — *intenzitet (modul)* vektora. Prema svojim geometrijskim osobinama vektori se dele ovako: a. *vektori vezani za tačku* sa nabrojenim ostalim elementima; b. *vektori vezani za pravu* sa proizvoljnim položajem početka na pravoj nosača; c. *slobodni vektori* sa proizvoljnim položajem početka u prostoru, sa određenom osnovom, smerom i intenzitetom. Pošto se u ovoj knjizi primenjuju samo slobodni vektori, reč vektor označavaće samo slobodni vektor. Prava-nosač slobodnog vektora je određena do paralelizma.

Oznake vektora:

$$\overrightarrow{AB},\ \vec{V},\ \vec{A},\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{i},\ \vec{j}\ \vec{k}, \ldots \vec{\omega}, \vec{\Omega},$$

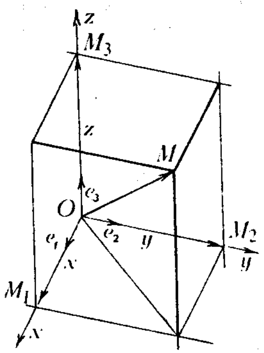
a tako isto i navedena slova bez strelice kad je značenje oznake naročito naglašeno.

Veličine koje se određuju vektorima nazivaju se *vektorske veličine*.

Dva vektora su jednaka, kad su njihove osnove paralelne (ili se poklapaju), smerovi su isti i intenziteti jednaki.

Znamo da tri uzajamno ortogonalne ose iz zajedničke tačke obrazuju *ortogonalni koordinatni trijedar*, (sl. 2). Tri ose Ox, Oy, Oz tog trijedra mogu imati dva različita rasporeda. Ako uzmemo u obzir sferni trougao sa temenima u presecima osa Ox, Oy, Oz sa sferom centra O, proizvoljnog poluprečnika, onda red temena na periferiji tog trougla, ako gledamo na njega spolja, može ili odgovarati kretanju kazaljke na časovniku ili biti suprotnog smera. U prvom slučaju imamo tzv. *levi trijedar*, u drugom—*desni* (sl. 3). Sad se

u literaturi više upotrebljuje desni trijedar, zato što odgovara kretanju zavrtnja: pri obrtanju sleva nadesno (od x prema y) normalan *zavrtanj* se pomera u smeru z ose.



Sl. 2 — Ortogonalni koordinatni trijedar

Rastojanja neke tačke M prostora od *koordinatnih ravni* Oyz, Ozx, Oxy, sa odgovarajućim znacima prema smeru normalnih osa, su *koordinate* x, y, z tačke M u prostoru; piše se $M(x, y, z)$.

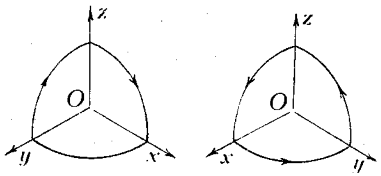
Prema postupcima, poznatim iz Elementarne matematike, za *sabiranje*, *oduzimanje* i *množenje vektora skalarnim množiocem* možemo napisati ovaj obrazac za vektor $\overrightarrow{OM}$, *vektor položaja* tačke M u odnosu na tačku O:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k},$$

gde su: $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, odnosno $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ *jedinični vektori (ortovi)* osa Ox, Oy, Oz. Uporedo sa napisanom vektorskom jednačinom možemo napisati ovu brojnu jednačinu

$$u = x_1\,e_1 + x_2\,e_2 + x_3\,e_3$$

izraženu u tzv. *vektorskim brojevima*. Sa u je označen *trodimenzioni vektorski broj* što odgovara vektoru $\overrightarrow{OM}$; x, y, z su skalari, a e_1, e_2, e_3 su *osnovne vektorske jedinice*, koje se često označuju i sa i, j, k, a njihovi vektori sa $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



Sl. 3 — Trijedri, levi i desni

Modul i *intenzitet vektora* i *vektorskog broja* imaju istu oznaku i istu skalarnu vrednost izraženu pomoću koordinata:

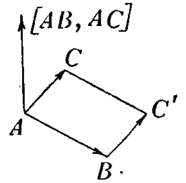
$$|\overrightarrow{OM}| = |\vec{r}| = \bar{r} = |u| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

U vektorskoj algebri postoji više proizvoda dva vektora. *Skalarni* ili *unutrašnji proizvod* dva vektora AB i AC sa oznakom $(AB,\ AC)$ je *skalar* jednak proizvodu intenziteta ovih vektora i kosinusa ugla α između njih, tj.

$$(AB,\ AC) = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos\alpha\,.$$

Ako je jedan od tih vektora jedinični vektor, recimo $\vec{a}$, prethodni obrazac daje $(AB,\ \vec{a}) = \overline{AB}\cos\alpha$, a to je vrednost *projekcije vektora* AB *na osu* $\vec{a}$. Skalarni proizvod dva vektorska broja $u_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $u_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ ima vrednost $(u_1 u_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Vektorski ili *spoljašnji proizvod* dva vektora AB i AC sa oznakom $[AB,\ AC]$ je *vektor*, koji ima ove elemente: 1. Osnova mu (sl. 4) stoji upravno na ravni datih vektora; 2. Smer mu je uperen u onaj poluprostor odakle bi posmatrač video da drugi vektor, nadovezan na kraj prvog, obrće prvi vektor u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku (konvencija desnog trijedra); 3. Intenzitet mu je brojno jednak veličini površine paralelograma konstruisanog na datim vektorima kao na stranama, tj. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin\alpha$.



Sl. 4 — Vektorski proizvod

Oba proizvoda se pokoravaju zakonima množenja skalarnih veličina, sa tom *važnom razlikom* što je *vektorski proizvod nekomutativan*, tj. $[AB,\ AC] = -[AC,\ AB]$ i prema tome u slučaju vektorskog proizvoda treba dobro paziti na red množilaca: sa potrebnom promenom reda menjati znak (!).

Vektorski proizvod paralelnih ili kolinearnih vektora jednak je nuli. Za vektorske proizvode osnovnih jediničnih vektora e_1, e_2, e_3 imamo ovu tablicu sa prvim činiocem iz vertikalnog stupca:

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Na osnovu ove tablice prema distributivnom zakonu sleduje ovaj obrazac za vektorski proizvod dva vektorska broja:

$$[u_1, u_2] = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\,e_1 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\,e_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\,e_3.$$

Desna strana ove jednačine se može napisati kao *determinanta* trećega reda u obliku $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$. O pravilima razvijanja determinanata govorićemo na drugom mestu (str. 206.).

Od tri vektora odnosno od tri vektorska broja u_1, u_2, u_3 mogu se obrazovati ovi *proizvodi:*

a. skalarni proizvod jednog i vektorskog proizvoda dva ostala $(u_1[u_2, u_3]) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. Osobine $(u_1[u_2, u_3]) = (u_2[u_3, u_1]) = (u_3[u_1, u_2]) = -(u_1[u_3, u_2]) = -(u_2[u_1, u_3]) = -(u_3[u_2, u_1])$, ciklična permutacija prava ili inverzna. Kratka oznaka: (u_1, u_2, u_3). Uslov komplanarnosti $(u_1, u_2, u_3) = 0$. Obrasci za razlaganje vektora odnosno vektorskog broja u u tri komponente sa pravcima vektorskih brojeva u_1, u_2, u_3: $u = (u, v_1)\, u_1 + (u, v_2)\, u_2 + (u, v_3)\, u_3$, gde su

$$v_1 = (u_1, u_2, u_3)^{-1}[u_2, u_3], \quad v_2 = (u_1, u_2, u_3)^{-1}[u_3, u_1],$$

$$v_3 = (u_1, u_2, u_3)^{-1}[u_1, u_2].$$

b. vektorski proizvod jednog i vektorskog proizvoda dva ostala $[u_1[u_2, u_3]] = u_2(u_1, u_3) - u_3(u_1, u_2)$.

Navedimo još *proizvode od četiri vektora*, odn. vek. broja, koji mogu biti od koristi.

1. $([u_1 u_2][u_3 u_4]) = (u_1 u_3)(u_2 u_4) - (u_1 u_4)(u_2 u_3)$.

2. $[[u_1 u_2][u_3 u_4]] = u_2(u_1[u_3 u_4]) - u_1(u_2[u_3 u_4]) =$
$$= u_2(u_1 u_3 u_4) - u_1(u_2 u_3 u_4).$$

3. $[[[u_1 u_2] u_3] u_4] = (u_1 u_3)[u_2 u_4] - (u_2 u_3)[u_1 u_4] =$
$$= u_3(u_1 u_2 u_4) - [u_1 u_2](u_3 u_4).$$

Nekoliko vektorskih jednačina i njihova rešenja pomoću vektorskih brojeva. Oznake: ξ nepoznati vektorski broj, $v_1, v_2, \ldots$ dati vektorski brojevi, v — proizvoljan vektorski broj, $s_1, s_2, \ldots$ dati skalari, s — proizvoljan skalar.

1. $\xi \pm v_1 = v_2$. Reš. $\xi = v_2 \mp v_1$.

2. $s_1 \xi = v_1$. Reš. $\xi = s_1^{-1} v_1$.

3. $(v_1 \xi) = s_1$. Reš. $\xi = s_1 v_1^{-2} v_1 + [v v_1]$; $v_1^2 = |v_1|^2 = (v_1 v_1)$.

4. $[v_1 \xi] = v_2$. Reš. $\xi = s v_1 + v_1^{-2}[v_2 v_1]$; iz date jednačine sleduje da je $(v_1 v_2) = 0$.

5. $[v_1 \xi] = v_2$, $(v_3 \xi) = s_1$. Reš. $\xi = (v_1 v_3)^{-1}\{s_1 v_1 + [v_2 v_3]\}$; isto $(v_1 v_2) = 0$.

6. $(v_1 \xi) = s_1$, $(v_2 \xi) = s_2$, $(v_3 \xi) = s_3$.

Reš. $\xi = (v_1 v_2 v_3)^{-1}\{s_1[v_2 v_3] + s_2[v_3 v_1] + s_3[v_1 v_2]\}$.

7. $[v_1 \xi] + s_1 \xi = v_2$.

Reš. $\xi = \{s_1(v_1^2 + s_1^2)\}^{-1}\{v_1(v_1 v_2) + s_1^2 v_2 + s_1[v_2 v_1]\}$.

1.4. Veličine stalne i promenljive

Veličine na čije proučavanje se primenjuju matematičke metode imaju *brojnu vrednost* i *imenovanje*, koje odgovara prirodi date veličine. Neke veličine mogu da budu i *apstraktni brojevi*, bez imenovanja. Brojna vrednost veličine se dobiva kao rezultat *merenja*. U osnovi merenja leži određivanje skalarnih brojeva, jednog (napr. za dužinu, masu i dr.) ili više njih (površina, zapremina, gustina i dr.). Merenje se vrši *neposredno* ili *posredno*. Pri posrednom merenju se određuju pomoćne veličine, na osnovu kojih se tražena veličina određuje izračunavanjem.

Znamo da veličine mogu biti *stalne*, kojima odgovaraju *stalni brojevi* i *promenljive*, sa *promenljivom brojnom vrednošću*. Za stalne veličine, koje imaju istu vrednost u čitavom procesu postupanja sa njima, upotrebljuje se i reč *konstanta*, kao termin. Konstante se dele na *relativne* i *apsolutne*. Relativne imaju stalne vrednosti samo u određenim procesima, a apsolutne u svim procesima rasuđivanja sa njima. Brojevi π i e određuju apsolutne konstante.

Oblast ili *područje* promenljivih (varijabilnih) veličina je skup svih onih vrednosti, koje mogu, prema datim uslovima, uzimati te veličine. Oblast može biti *jednodimenziona* sa promenljivom x (tačke na pravoj), *dvodimenziona* sa pro-

menljivim x, y (tačke na površini odnosno ravni), *trodimenziona* sa x, y, z (tačke u prostoru). *Rub* je granica oblasti. Oblast je *zatvorena* ili *otvorena* pod uslovima da tačke ruba pripadaju ili ne pripadaju oblasti. Oblast može biti *diskretna* ili *neprekidna* (*kontinuum*).

1.5. Pojam funkcije

Za dve promenljive veličine x i y se kaže da su *u funkcionalnoj vezi*, ako za svaku vrednost, recimo, promenljive x, u njenom području, možemo odrediti jednu ili više određenih vrednosti y. Tada je y *funkcija* x-a; x je *nezavisno promenljiva*, y je *zavisna*. Oznake: $y = \text{fonct.}(x)$; $y = y(x)$; $y = \Phi(x)$, $\psi(x)$, ...; slova, f, y, Φ, ψ, ... su *simboli funkcija*. Oblast promenljive x (*argumenta funkcije*) je *oblast postojanja*, (*egzistencije*) funkcije. Funkcija je *jednoznačna*, *dvoznačna* ili *mnogoznačna*, ako svakoj vrednosti x odgovara jedna, dve ili više vrednosti promenljive y. Posebnoj vrednosti argumenta odgovara posebna vrednost funkcije: $y_1 = f(x_1)$. Funkcije više promenljivih su: $z = f(x, y)$; $w = w(x, y, z; t)$.

Funkcionalna veza, recimo, između x i y, postavlja se na više načina.

1. *Analitički način:* a. *obrascem* (*formulom*) $y = f(x)$, gde je f simbol operacija koje treba izvršiti sa brojnom vrednošću x-a da dobijemo brojnu vrednost y-a (*rešen* ili *eksplicitni oblik*). b. *jednačinom* $\varphi(x, y) = 0$. Prema datoj vrednosti x rešenje jednačine po y daje vrednost funkcije y (*skriven* ili *implicitni oblik*). c. *u parametarskom obliku:* $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, gde je *t pomoćni parametar*. (Primeri: a. $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$. b. $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. c. $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ ili $x = r\dfrac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$,

$$y = 2r\frac{\tau}{1+\tau^2}\Big).$$

2. *Tablični način:* a. *numeričke tablice* u kojim su navedene, u izvesnom redu, vrednosti funkcije za određene vrednosti argumenta. Te vrednosti su unapred određene izračunavanjem (računom ili mašinom). b. *tablice vrednosti funkcija* kao rezultat opažanja ili eksperimentisanja.

3. *Grafički način.* U koordinatnom sistemu, recimo u Dekartovom, koordinata x se uzima za nezavisno promenljivu, a y za funkciju. Paru vrednosti (x, y) odgovara tačka M u koordinatnoj ravni. Pri promeni x tačka M crta krivu — *grafik funkcije*. Važan je slučaj neprekidne linije koja odgovara neprekidnoj funkciji. Grafik funkcije se dobiva ili crtanjem, tačnim pomoću naročitog geometrijskog alata (lenjira, pravolinijskog ili krivolinijskog, šestara, elipsografa i dr.) i približnim, spajanjem posebnih tačaka pravim ili krivim prema određenim pravilima, ili pomoću naročitih aparata koji automatski crtaju odgovarajuće grafike.

4. *Mašinski način.* Već *obična računska mašina* posle unošenja vrednosti promenljivih brojeva u nju automatski daje rezultat izvršene radnje, tj. funkciju unesenih brojeva. Savremena *elektronska mašina* daje rezultat-funkciju posle izvršenja čak i vrlo komplikovanih radnji, a može automatski crtati i grafik odgovarajuće funkcije.

1.51. *Inverzne funkcije*

Ako između operacija f i φ dve funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ postoji funkcionalni identitet $f[\varphi(x)] \equiv x$, odnosno $\varphi[f(x)] \equiv x$, za sve vrednosti x u određenoj oblasti, onda se kaže da su te dve *funkcije inverzne* ili *obrnute* jedna drugoj u toj oblasti. Primeri: 1. $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$. Tada je $[\sqrt{x}]^2 \equiv x$, odnosno $\sqrt{x^2} \equiv x$. 2. $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \arcsin x$; $\sin(\arcsin x) \equiv x$, $\arcsin(\sin x) \equiv x$.

Ako je funkcionalna veza data u implicitnoj formi

$$F(x, y) = 0,$$

njoj odgovaraju dve funkcije $y = f(x)$ i $x = \varphi(y)$. Dve funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ tada su inverzne. Primer. $4x^2 + y^2 - 4 = 0$; $y = +2\sqrt{1-x^2}$, $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{4-y^2}$. Dve funkcije $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ i $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ su inverzne, jer je $2\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right)^2} \equiv$ $\equiv \sqrt{4-4+x^2} \equiv x$, odn. $\dfrac{1}{2}\sqrt{4-(2\sqrt{1-x^2})^2} \equiv \dfrac{1}{2}\sqrt{4-4+4x^2} \equiv x$.

Grafici inverznih funkcija $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ u Dekartovim koordinatama su krive simetrične u odnosu na simetralu prvog i trećeg kvadranta Dekartovih osa.

Glava druga

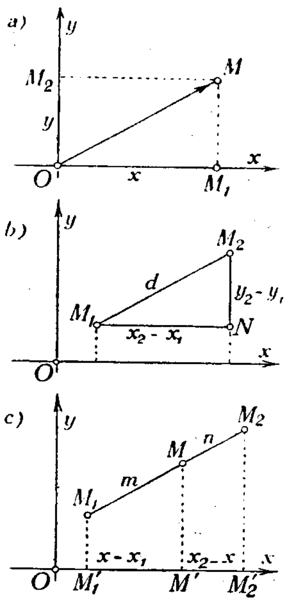
ANALITIČKA GEOMETRIJA

A. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI

2.1. Koordinate. Osnovni obrasci

Analitička geometrija proučava geometrijske objekte — tačke, linije, površine i dr. — pomoću operacija sa brojevima, skalarnim i vektorskim.

Dekartov koordinatni sistem (sl. 1*, a). Tačka $M(x, y)$; x i y su *Dekartove koordinate tačke; x* je *apscisa*, y — *ordinata*.



Sl. 1* — Dekartov koordinatni sistem

Koordinate x, y su apstraktni brojevi, odnosi dužine OM_1, odnosno OM_2 prema dužini OM_0 uzetoj za jedinicu. Znak, pozitivan ili negativan, koordinate x (odnosno y) zavisi od smera vektora OM_1 (OM_2) uporedo sa smerom ose Ox (Oy).

Rastojanje (sl. 1*, b) *d između dve tačke* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ ima vrednost:

$$d = +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};$$

rastojanje tačke $M(x, y)$ *od početka koordinata*

$$d = +\sqrt{x^2+y^2}.$$

Koordinate tačke $M(x, y)$, koja deli duž čiji su krajevi $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ (sl. 1*,c) u datoj razmeri $\lambda = m:n = M_1M:MM_2$, iznose:

$$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n} = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{my_2+ny_1}{m+n} = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Koordinate sredine duži M_1M_2:

$$x = \frac{1}{2}(x_1+x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1+y_2).$$

Ako je $\lambda > 0$, tačka M je na duži M_1M_2; za $\lambda < 0$ ona je van duži; za tačku M_2 veličina λ ima skok $\pm\infty$.

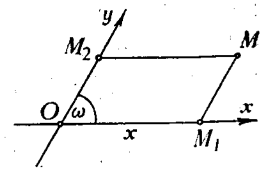
Površina trapeza sa temenima: $M_1(x_1, 0)$, $M_2(x_2, 0)$, $M_3(x_2, y_2)$, $M_4(x_1, y_1)$ biće $Q = \frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_1+y_2)$.

Površina trougla sa temenima: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$:

$$Q = \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Kosougle koordinate. Afine koordinate. Koordinatne ose nisu ortogonalne (sl. 1**). Ugao između osa $\omega \neq \frac{\pi}{2}$. $OM_1 = x$, $OM_2 = y$; $M_1M \parallel Oy$, $M_2M \parallel Ox$. Ako su jedinice za merenje OM_1 i OM_2 jednake, x i y su (obične) *kosougle koordinate*. U opštem slučaju različitih jedinica, koordinate se zovu *afine*.

Polarne koordinate r i θ (vidi sliku 1 str. 13): r je *polarni poteg* OM, meren datom jedinicom dužine; prema tome je r apstraktni broj, *polarni ugao* θ se meri odnosom luka prema poluprečniku. *Veze između polarnih i Dekartovih koordinata:*



Sl. 1—Kosougle koordinate**

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta;$$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$. *Rastojanje između dve tačke u polarnim koordinatama*: $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$.

Transformacija Dekartovih koordinata.

1. Nove ose $O'x'y'$ imaju isti pravac i smer, nov početak O' sa koordinatama a, b u odnosu na ose Oxy, tada su

$$x = x' + a, \quad y = y' + b,$$

gde su x', y' koordinate iste tačke u odnosu na ose $O'x'y'$.

2. Početak je isti, osa Ox' čini ugao α sa osom Ox, tada su: $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$

3. Opšti slučaj:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+a,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+b.$$

2.2. Geometrijsko mesto tačaka. Jednačina linije

Niz tačaka, čiji položaj zadovoljava određene uslove, zove se *geometrijsko mesto tačaka* sa datim uslovima. Od naročite važnosti je slučaj kad geometrijsko mesto tačaka predstavlja liniju. Analitička geometrija proučava geometrijska mesta tačaka pomoću jednačina i, obrnuto, tumači jednačine pomoću geometrijskih mesta.

Primeri: 1. Geometrijsko mesto tačaka (skr. G. m. t.) $M(x, y)$ podjednako udaljenih od tačaka $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ ima jednačinu:

$$x(x_2-x_1)+y(y_2-y_1)+\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)=0.$$

To je simetrala duži M_1M_2. 2. G. m. t. $M(x, y)$ na istom rastojanju r od tačke $C(a, b)$. Jednačina

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0.$$

Kružna linija. 3. G. m. t. sa stalnim odnosom k rastojanja tačke $M(x, y)$ od dve stalne tačke F_1 i F_2: $F_1M:F_2M=k$. *Apolonijev krug* [II, 128]. Izvesti jednačinu. 4. G. m. t. podjednako udaljenih od date tačke $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ i date prave čija je jednačina $x=-\frac{p}{2}$. Parabola sa jednačinom $y^2=2px$.

G. m. tačaka je grafik funkcije $y=f(x)$, koja izražava geometrijsku osobinu položaja tačaka pomoću promenljivih koordinata x, y tačke datog mesta. Jednačina $y=f(x)$ je jednačina grafika, linije datog g. m., izražena u *rešenom* ili *eksplicitnom obliku*. $F(x, y)=0$ je *skriven, implicitan oblik*. Najzad, $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$ — *parametarski oblik*. Ako tačka sa koordinatama x_0, y_0 pripada datoj liniji imamo identitete: $y_0\equiv f(x_0)$ ili $F(x_0, y_0)\equiv 0$, ili, najzad, $x_0=f_1(t_0)$, $y_0=f_2(t_0)$.

Jednačina krive u polarnim koordinatama: $r=f(\theta)$, ili $F(r, \theta)=0$.

Kriva sa jednačinom $P_n(x, y)=0$, gde je $P_n(x, y)$ polinom n-tog stepena po x i y, je *algebarska kriva n-toga reda.*

2.3. Prava linija

Oblici jednačine prave kao algebarske linije prvoga reda:

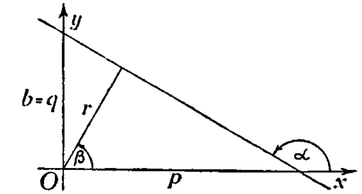
(1) *Opšti oblik:* $Ax+By+C=0$. Specijalni slučajevi: (1_1). $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, prava $\parallel Ox$ osi; (1_2). $B=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$. Prava $\parallel Oy$ osi. (1_3). $C=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$. Prava prolazi kroz početak koordinata. (1_4). $A=0$, $C=0$. Osa x. (1_5) $B=0$, $C=0$. Osa y. (1_6). $A=B=0$, pa i $C=0$. Prava ne postoji (u beskonačnosti). U opštem slučaju $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$ položaj prave zavisi od dva parametra; odnosa dva koeficijenta prema trećem.

(2) *Rešeni oblik:*

$y=ax+b$, gde je: $a=\operatorname{tg}\alpha$ ugaoni koeficijent, b — početna ordinata, α — ugao prave sa Ox.

(3) *Normalni oblik* (sl. 5):

$$x\cos\beta+y\sin\beta-n=0;$$



Sl. 5—Prava linija

n — dužina normale ($n>0$) iz početka koordinata na pravu, β — ugao te normale sa Ox osom.

(4) *Segmentni oblik* (sa otsečcima): $x/p+y/q=1$; $p, q=b$ odsečci prave na osama.

(5) *Parametarski oblik:* $x=x_1+lt$, $y=y_1+mt$; x_1, y_1 — koordinate tačke na pravoj, l, m — brojevi proporcionalni kosinusima uglova prave sa Ox i Oy osom.

(6) *Vektorski oblik:* $V=V_1+tV_2$; $V_1=OM_1$, $V_2=M_1M_2$ (može biti jedinični vektor), $V=OM$, gde je M proizvoljna tačka na pravoj, t — promenljivi parametar.

Pokažimo kako se, radi zgodnijeg rešavanja pojedinih zadataka, može jednačina prave u opštem obliku transformisati na druge oblike, a prema tome i makoji njen oblik u neki drugi. Beležimo to u skraćenoj formi.

Iz (1) u (2). Rešenje po y $(B\neq 0)$:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}=ax+b;\quad a=-A/B,\ b=-C/B.$$

Iz (1) u (3). Množenje *normirajućim množiocem*

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Znak je suprotan znaku C.

Iz (1) u (4). Deljenje sa

$$-C\,(C\neq 0).\ p=-C/A,\ q=-C/B\,(A\neq 0,\ B\neq 0).$$

Iz (1) u (5). Od jednačine $Ax+By+C=0$ oduzimamo identitet $Ax_1+By_1+C\equiv 0$, iz rezultata $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ izvodimo jednačine (5): $x=x_1+Bt$, $y=y_1-At$, gde je t proizvoljan broj.

Vektorski oblik (6) neposredno sleduje iz parametarskog oblika: $V(x, y)$, $V_1(x_1, y_1)$, $V_2(l, m)=V_2(B, -A)$.

Rešenja osnovnih zadataka.

1. Napisati jednačinu prave, koja prolazi kroz datu tačku $M_1(x_1, y_1)$. $y-y_1=a(x-x_1)$ ili $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$; ugaoni koeficijent a ili odnos $A:B$ su neodređeni. Specijalno: $x=x_1$ ili $y=y_1$.

2. Prava kroz dve tačke: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.\ \text{Ugaoni koeficijent } a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

3. Odrediti ugao α između dve prave sa ugaonim koeficijentima a_1 i a_2.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}.$$

Iz ovog obrasca sleduje: uslov paralelnosti pravih $a_2=a_1$ ili $A_1:A_2=B_1:B_2$ i uslov normalnosti $a_1a_2=-1$, $A_1A_2+B_1B_2=0$.

4. Odrediti koordinate tačke preseka dve prave

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0.$$

$$x=\frac{C_2B_1-B_2C_1}{A_1B_2-B_1A_2},\quad y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-B_1A_2},\quad \triangle=A_1B_2-B_1A_2\neq 0.$$

Ako je $\triangle=0$, ali $A_1/A_2\neq C_1/C_2$, prave su paralelne; a ako je $A_1/A_2=C_1/C$, prave se poklapaju.

5. Uslov da tri tačke $M(x, y)$, $M_1(x_1, y_1)$. $M_2(x_2, y_2)$ pripadaju istoj pravoj. Neposredno iz obrasca za površinu trougla sa navedenim temenima: $Q_\Delta=0$, tj. $\begin{vmatrix} x, & y, & 1\\ x_1, & y_1, & 1\\ x_2, & y_2, & 1\end{vmatrix}=0.$ Ako su x i y promenljive, imamo jednačinu prave kroz dve tačke u obliku determinante.

6. Uslov da se tri prave

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0,\ A_3x+B_3y+C_3=0$$

seku u istoj tački.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=0.$$

7. Odrediti rastojanje tačke $M_1(x_1, y_1)$ od prave sa jednačinom u normalnom i opštem obliku: $x\cos\beta+y\sin\beta-n=0$, $Ax+By+C=0$.

$$d=x_1\cos\beta+y_1\sin\beta-n=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ako je $d>0$, data tačka i početak koordinata se nalaze sa raznih strana od date prave; za $d<0$ ove tačke su sa iste strane od date prave.

8. Prava kroz presek dve date prave $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$.

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

gde je λ proizvoljan broj. Dopunski uslovi: 1. i prolazi kroz datu tačku $M_1(x_1, y_1)$, tada je

$$\lambda=-(A_1x_1+B_1y_1+C_1):(A_2x_1+B_2y_1+C_1).$$

2. i paralelna pravoj $A_3x+B_3y+C_3=0$, tada je $\lambda=-\Delta_1/\Delta_2$, gde su: $\Delta_1=B_1/B_3-A_1/A_3$, $\Delta_2=B_2/B_3-A_2/A_3$; 3. i normalna na istoj pravoj, tada je $\lambda=-\delta_1/\delta_2$, gde su: $\delta_1=A_1/B_3+B_1/A_3$, $\delta_2=A_2/B_3+B_2/A_3$; 4. i polove uglove između datih pravih, tada je $\lambda=\pm\frac{\nu_1}{\nu_2}$, gde su: $\nu_1=\sqrt{A_1^2+B_1^2}$, $\nu_2=\sqrt{A_2^2+B_2^2}$.

9. Napisati jednačinu prave u polarnim koordinatama r i θ. Iz normalnog oblika (3) za $OM=r$ neposredno sleduje tražena jednačina $r\cos(\beta-\theta)-n=0$.

10. Napisati tzv. *Pliker-ovu jednačinu* prave u ravni. Uzmimo datu pravu za osnovu stalnog vektora $V(A, B)$. Pliker-ova jednačina u obliku $xB - yA = g = \text{const.}$ izražava stalnost intenziteta vektorskog proizvoda vektora položaja OM proizvoljne tačke $M(x, y)$ date prave i vektora V. Ako stavimo $A = l\cos\alpha$, $B = l\sin\alpha$, tada je

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = g{:}l = \text{const:}$$

2.4. Krive linije drugoga reda

2.41. Kružna linija

Koordinate centra $c(x_c, y_c)$, poluprečnik r, jednačina kružne linije

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

Centar na Ox osi, jednačina $(x - x_c)^2 + y^2 = r^2$.
Centar na Oy osi, jednačina $x^2 + (y - y_c)^2 = r^2$.
Centar u početku koordinata, jednačina $x^2 + y^2 = r^2$.
Jednačini $x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ odgovara kružna linija sa centrom: $x_c = -D$, $y_c = -E$; kvadrat poluprečnika $r^2 = D^2 + E^2 - F > 0$ (stvarni krug), < 0 (imaginarni krug), $= 0$ (tačka). Opšta jednačina drugoga reda

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

određuje kružnu liniju pod uslovima: $A = C \neq 0$, $B = 0$. Jednačine kružne linije čiji je centar $c(x_c, y_c)$ u parametarskom obliku: $x = x_c + r\cos t$, $y = y_c + r\sin t$; čiji je centar u početku: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. U polarnim koordinatama ρ, θ:

$$\rho^2 + \rho_c^2 - 2\rho_c\,\rho\cos(\theta - \theta_c) - r^2 = 0.$$

U polarnim koordinatama čiji je pol na kružnoj liniji i polarna osa — prečnik: $\rho = 2r\cos\theta$; sa polom u centru: $\rho = r$.

2.42. Elipsa

Ako ordinate tačaka kružne linije (sl. 6) poluprečnika a čija je jednačina $x^2 + y^2 = a^2$, odnosno čije su parametarske jednačine $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, skratimo u istoj razmeri $PE : PK = b : a\ (b < a)$, dobićemo jednačinu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, odnosno parametarske jednačine $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, koje određuju

krivu koja se zove *elipsa*. $AA_1 = 2a$ je *velika*, $BB_1 = 2b$ *mala osa elipse*. Tačka O — *centar elipse*. Na velikoj osi, na rastojanju $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ od centra, dve tačke F i F_1 — *žiže* (*fokusi*) *elipse*. Druga definicija elipse: Elipsa je geometrijsko mesto tačaka u ravni za koje zbir rastojanja od dve stalne tačke, žiže, ima stalnu vrednost ($2a$). Količnik $c/a = e$ je *ekscentričnost elipse*. Ordinata tačke sa apscisom c je *parametar* $p = b^2/a$ *elipse*. Tačke A, A_1, B, B_1 su *temena elipse*. Dve prave paralelne maloj osi na rastojanju

$$\Delta = a/e = a^2/c > a$$

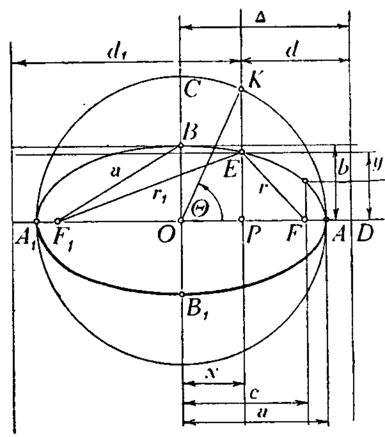
od centra su *direktrise* (*upravnice*) *elipse*. $FE = r$ i $F_1E = r_1$ su *fokalni potezi* tačke E elipse:

$$r_1 = a + ex, \quad r = a - ex.$$

Ako su d i d_1 rastojanja tačke E elipse od direktrisa, $r : d = r_1 : d_1 = e$.

Temeni oblik jednačine elipse:

$$y^2 = 2px\left(1 - \frac{x}{2a}\right)$$



Sl. 6 — Elipsa

u odnosu na ose paralelne sa osama Oxy sa početkom u temenu A_1.

Jednačina elipse u polarnim koordinatama ρ, θ:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

Pol je u žiži F, polarna osa prema bližem temenu A.

G. m. sredina paralelnih tetiva (ug. koef. m_1) je prečnik elipse *(dijametar)* ug. koef. m_2. Obratno, tetive pravca m_2 daju prečnik (dijametar) pravca m_1. Pravci prečnika i tetiva su *konjugovani*, $m_1 m_2 = -b^2/a^2$. *Dužine konjugovanih dijametara* $2a_1$ i $2b_1$ sa $m_1 = \operatorname{tg}\alpha$, $m_2 = -\operatorname{tg}\beta$ (α i β su uglovi sa velikom osom) zadovoljavaju *dve invarijante*: $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$;

$a_1 b_1 \sin(\alpha+\beta) = ab$. Normalni konjugovani dijametri su *glavni dijametri* u pravcima *osa simetrije* elipse.

Jednačina *tangente na elipsu* u tački $M_1(x_1, y_1)$

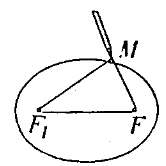
$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Jednačina *normale*

$$(x-x_1)\, a^2\, y_1-(y-y_1)\, b^2\, x_1=0.$$

Osobine: Tangenta na kraju jednog dijametra ima pravac konjugovanog dijametra. Tangenta i normala polove uglove između pravaca dva fokalna potega iste tačke. Ako je tačka $M_1(x_1, y_1)$ van elipse, jednačina $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ određuje *polaru* elipse za tačku M_1. Polara spaja tačke dodira tangenata na elipsu iz tačke M_1.

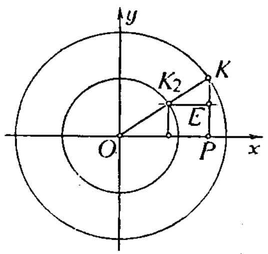
Konstrukcije elipse



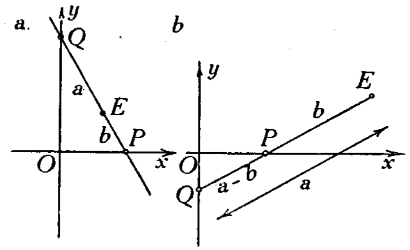
Sl. 7 — Konstrukcija elipse 1

1. Končanu petlju od nerastegljivog konca dužine $2(a+c)$ zategnimo trouglom FF_1MF (sl. 7) oko dva klinčića F i F_1 učvršćena na hartiji. Zatežući konac, kraj olovke M crta elipsu.

2. Dva koncentrična kruga poluprečnika a i b (sl. 8). Tačke K i K_2 na proizvoljnom poluprečniku OK. Tačka E elipse je presek normale KP na osu Ox i prave K_2E paralelne toj osi $EP:KP=b:a$.



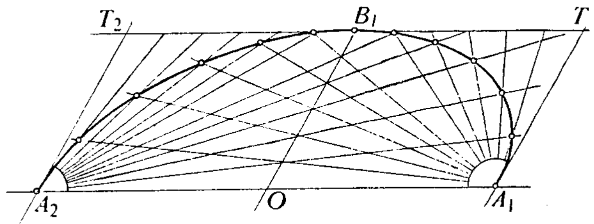
Sl. 8—Konstrukcija elipse 2



Sl. 9 a, b—Konstrukcija elipse 3

3. Krajevi duži PQ (sl. 9 a) dužine a se kreću po osama Ox i Oy. Tačka E te duži sa $EP=b$ crta elipsu. Varijanta:

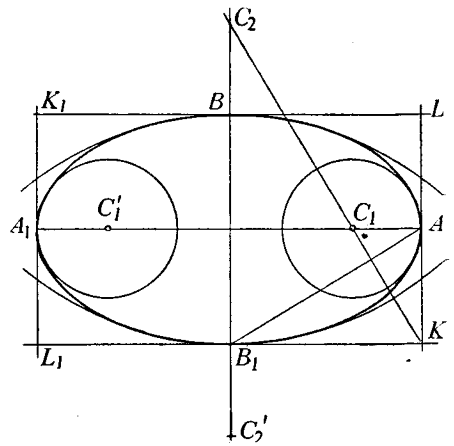
krajevi duži PQ (sl. 9 b), dužine $a-b$ se kreću po osama Ox, Oy. Tačka E sa $EQ=a$ crta elipsu. Kao što je poznato, navedeno kretanje duži PQ ostvaruje tzv. *Kardanovo kretanje*, koje se može ostvariti i kotrljanjem bez klizanja kruga određenog poluprečnika unutra po krugu dvostrukog poluprečnika.



Sl. 10 — Konstrukcija elipse po tačkama

4. Sa datim konjugovanim prečnikom A_1A_2 i poluprečnikom OB_1 (sl. 10) tačke elipse se mogu konstruisati prema postupku pokazanom na slici 10.

5. Približna konstrukcija elipse se može izvršiti i pomoću krugova krivine (str. 153) u temenima elipse (sl. 11). Iz tačke K se spušta normala na pravu AB_1. Produžena, ona seče Ox i Oy ose u centrima C_1 i C_2 krugova krivine za temena A i B_1. Odgovarajući delovi tih krugova približno se spajaju prigodnim krivim linijama pomoću krivolinijskog lenjira.



Sl. 11 — Približna konstrukcija elipse

Površina elipse iznosi πab. Ona se deli na jednake delove podelom kruga poluprečnika a, jer svakom kružnom

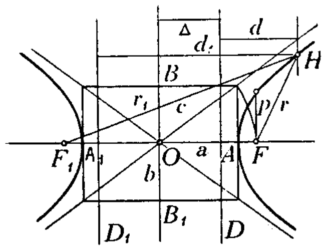
sektoru Q_k odgovara površina eliptičkog ekscentričnog sektora $Q_e = \frac{b}{a} Q_k$; elipsa je projekcija kruga na ravan sa uglom φ između ravni, pri čemu je $\cos\varphi = b/a$.

Približne vrednosti periferije L elipse se daju tablicom vrednosti L/a u funkciji odnosa b/a.

b/a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
L/a	4,064	4,202	4,386	4,603	4,844	5,105	5,382	5,672	5,972

2.43. *Hiperbola*

Hiperbola je g. m. t. u ravni za koje razlika rastojanja od dve stalne tačke ima stalnu vrednost. Stalne tačke F i F_1 (sl. 12) su *žiže* (*fokusi*) *hiperbole*. Stavimo $FF_1 = 2c$. Sredina duži FF_1 je *centar hiperbole*. H je proizvoljna tačka hiperbole. $HF = r$, $HF_1 = r_1$ su *fokalni potezi tačke* H. Prema definiciji $HF_1 - HF = r_1 - r = \text{const} = 2a$ (desna grana), $r - r_1 = 2a$ (leva grana). Jednačina hiperbole je



Sl. 12 — Hiperbola

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1.$$

$AA_1 = 2a$ je *realna osa* hiperbole, $BB_1 = 2b$, sa $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, je *imaginarna osa*. Dijagonale pravougaonika čije su dimenzije $2a$ i $2b$ su *asimptote hiperbole* čije su jednačine $y = \pm bx/a$ ili $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$. Jednačine elipse i hiperbole imaju osobinu da jedna prelazi u drugu posle zamene b sa bi $(i = +\sqrt{-1})$. Jednačine hiperbole u rešenom obliku $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Količnik $c/a = e > 1$ je *ekscentričnost hiperbole*. Vrednost fokalnih potega: $r = ex - a$, $r_1 = ex + a$ (za desnu granu) i $r = a - ex$, $r_1 = -a - ex$ (za levu granu). Tačke A i A_1 su *temena hiperbole*. Dve prave paralelne imaginarnoj osi na rastojanju Δ od centra sa $\Delta = a/e = a^2/c < a$ su *direktrise* (*upravnice*) *hiperbole*. Njihove jednačine $x = \Delta$, $x = -\Delta$. Ako

označimo sa d rastojanje tačke H od prve direktrise i sa d_1 od druge, onda je $r : d = r_1 : d_1 = e$.

Temeni oblik jednačine hiperbole

$$y^2 = 2px\left(\frac{x}{2a} - 1\right),$$

gde je $p = b^2/a$ *parametar hiperbole*, ordinata tačke hiperbole sa apscisom c.

Ako je $a = b$, hiperbola je jednakostrana sa jednačinom $x^2 - y^2 = a^2$. Ako za nove ose $O\xi$, $O\eta$ uvedemo simetrale uglova između koordinatnih osa Ox, Oy, posle transformacije koordinata

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\eta + \xi), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\eta - \xi),$$

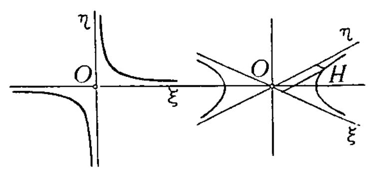
imamo jednačinu *jednakostrane hiperbole* u odnosu na asimptote

$$\xi\eta = a^2/2 = \text{const.}$$

Hiperbola je grafik obrnute proporcionalnosti. Ova osobina važi i za proizvoljnu hiperbolu u odnosu na odgovarajuće kosougle ose, asimptote hiperbole (sl. 13 a, b).

U parametarskom obliku jednačine hiperbole se mogu napisati na dva načina:
1. $x = a/\cos t$, $\quad y = b\,\mathrm{tg}\,t$.
2. $x = a\cosh\varphi$, $\quad y = b\sinh\varphi$,

gde su $\cosh\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$, $\sinh\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$ hiperboličke funkcije koje zadovoljavaju uslov $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.



Sl. 13 — Hiperbole u odnosu na asimptote

G. m. sredina paralelnih tetiva (ug. koef. m_1) je prečnik (ug. koef. m_2). Pravci tetiva i prečnika hiperbole su konjugovani, $m_1 m_2 = b^2/a^2$. Glavni prečnici su ose simetrije.

Dve *hiperbole* $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$ su *konjugovane*. One imaju zajedničke asimptote.

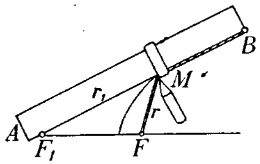
Jednačine tangente i normale za hiperbolu čija je jednačina $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ u tački $M(x_1, y_1)$ su: $xx_1/a^2 - yy_1/b^2 = 1$,

$(x-x_1)\,a^2 y_1+(y-y_1)\,b^2 x_1=0$. Tangenta i normala polove unutrašnji i spoljašnji ugao između fokalnih potega.

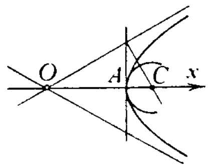
Jednačina hiperbole u polarnim koordinatama je ista kao u jednačina elipse, samo ekscentričnost e ima vrednost veću od jedinice.

Konstrukcija hiperbole

1. Lenjir AB (sl. 14) pričvrstimo čicdom za hartiju, u tački F_1, tako da se može oko ove tačke slobodno okretati. Za kraj B lenjira zakačen je nerastegljiv konac, koji je drugim svojim krajem, vezan za tačku F na hartiji. Duž lenjira može slobodno kliziti kuka M, kroz koju prolazi konac. Olovku, kojom izvlačimo hiperbolu, držimo tako da joj vrh ostaje stalno priljubljen uz kuku. Prema tome konac treba da ima položaj FMB i njegov deo MB treba stalno da leži na lenjiru. Ako lenjir okrećemo oko tačke F_1, držeći konac pri tome zategnut, vrh olovke M opisuje hiperbolu.



Sl. 14 — Crtanje hiperbole



Sl. 14a — Krivina hiperbole kod temena

2. Ako je $H_0(\xi_0, \eta_0)$ data tačka u ravni, ordinata η tačke jednakostrane hiperbole sa apscisom ξ se određuje iz jednačine $\xi\eta=\xi_0\eta_0$ kao četvrta proporcionala iz proporcije

$$\eta : \eta_0 = \xi_0 : \xi.$$

Prelaz na raznostranu hiperbolu opšteg slučaja se vrši promenom tetiva upravnih na simetralu ugla između $O\xi$ i $O\eta$ u istoj srazmeri.

3. Za približnu ocenu krivine (str. 154). hiperbole kod temena A (sl. 14a) određuje se centar kruga krivine, tačka C, kao presak Ox ose i normale na asimptotu iz tačke preseka asimptote i tangente na hiperbolu u temenu A.

Površina hiperboličkog sektora

U integralnom računu se pokazuje da je površina Q hiperboličkog sektora, omeđenog delom OA ose x, lukom AH hiperbole i potegom OH tačke H hiperbole ima vrednost

$$Q=\frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

2.44. Parabola

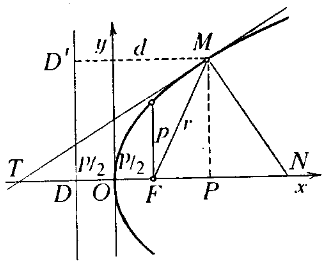
Parabola (sl. 15) je g. m. t. u ravni podjednako udaljenih od stalne tačke (*žiže, fokusa*) i stalne prave (*direktrise*).

Temeni oblik jednačine parabole

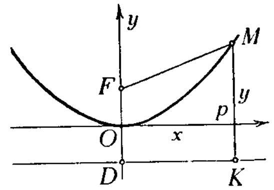
$$y^2=2px,$$

gde je p *parametar parabole*, tj. ordinata tačke parabole sa apscisom žiže $x=p/2$. *Teme parabole*, početak koordinata, polovi rastojanja između žiže i direktrise. Osa Ox je *osa simetrije parabole. Fokalni poteg* $FM=r=\frac{p}{2}+x$. *Ekscentričnost parabole* $e=\frac{r}{d}=1$. *Jednačina direktrise* $x=-\frac{p}{2}$. Za paralelne tetive (ug. koef. m) jednačina prečnika je $y=p/m$. Jednačina tangente u tački $M_1(x_1, y_1)$ na parabolu:

$$yy_1=p\,(x+x_1).$$



Sl. 15 — Parabola

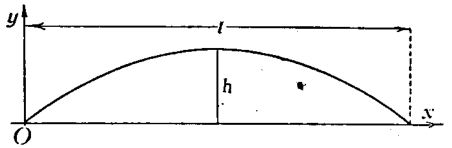


Sl. 16 — Parabola kao grafik kvadratne funkcije

Jednačina normale $y-y_1=-\frac{y_1}{p}(x-x_1)$. Tangenta polovi ugao između fokalnog potega i negativnog pravca Ox ose. Normala polovi uporedni ugao prethodnog ugla.

Jednačina parabole u polarnim koordinatama ρ, θ sa polom u žiži F i polarnom osom prema temenu:

$$\rho=\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{p}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta.$$



Sl. 17 — Parabola na tetivi sa strelicom

Jednačina parabole kao *grafika kvadratne funkcije* $y=ax^2$ (sl. 16). Jednačina tangente u tački $M_1(x_1, y_1)$ na parabolu $y=ax^2$ ima oblik:

$$y=ax_1(2x-x_1).$$

Tangenta polovi apscisu tačke dodira.

Parametarske jednačine parabole: $x=2pt^2$, $y=2pt$.

Jednačina parabole sa parametrima: *tetivom* l i *strelicom* h (sl. 17):

$$y=\frac{4h}{l}\cdot\frac{x(l-x)}{l}.$$

U opštem slučaju, kvadratnoj funkciji $y=ax^2+bx+c$ odgovara parabola sa temenom u tački $x_0=-b:2a$,

$$y_0=-\frac{1}{4a}(b^2-4ac)$$

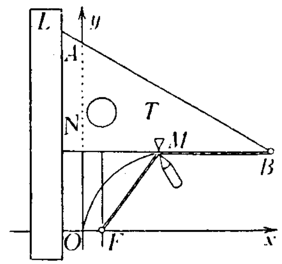
i simetralom u pravcu Oy ose čiji je otvor u smeru te ose za $a>0$ i u suprotnom smeru za $a<0$.

Jednačini $x=ay^2+by+c$, ili u obliku rešenom po y

$$y=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{x}{a}+\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

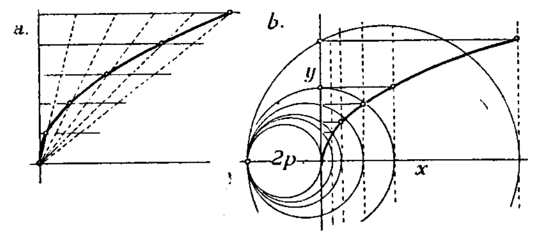
odgovara parabola čije je teme u tački $x_0=-(b^2-4ac):4a$, $y_0=-b/2a$.

1. Neka lenjir L (sl. 18), čvrsto utvrđen na stolu, određuje položaj direktrise; i pretpostavimo da pravougli trougao T, svojom katetom NA, može kliziti duž tog lenjira. Postavimo, prvo, drugu katetu NB tog trougla tako da se na njoj nalazi žiža F. Zatim uzmimo konac i jedan njegov kraj učvrstimo u tački F na stolu. Kuku M, koja se može kretati po kateti NB, stavimo na sredinu rastojanja između žiže i direktrise. Konac provucimo kroz kuku do kraja B katete i tu mu pričvrstimo drugi kraj. Ako kateta NA trougla počne da se kreće nagore, kraj olovke, pričvršćen za pokretnu kuku, pri stalno zategnutom koncu, opisaće parabolu, jer će stalno biti $FM=NM$. Kuka se pri tome ne sme odvajati od katete NB.



Sl. 18 — Crtanje parabole

2. Odmerimo na pravoj $y=b$ od Oy ose niz jednakih dužina σ. Tačke preseka prave $y=\frac{b}{k\sigma}x$, gde je k ceo broj, sa pravom $y=ks$, pri $s:\sigma=\alpha=\text{const}$, pripadaju paraboli $y^2=b\alpha x$ (sl. 19a).



Sl. 19 a, b — Crtanje parabole po tačkama

3. Levo od početka koordinata odmerimo dužinu $OA=2p$ (sl. 19b), a desno apscisu x tražene tačke parabole. Ordinata y te tačke se određuje poznatom konstrukcijom srednje proporcionale za duži $2p$ i x.

4. Približna konstrukcija luka parabole oko temena može se izvršiti pomoću kruga krivine sa poluprečnikom p.

2.45. *Opšta jednačina drugog stepena*

Opšta jednačina drugog stepena

(1) $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

određuje liniju koja se zove *kriva drugoga reda* ili *konusni presek*. Koeficijenti te jednačine mogu se napisati ovom *matričnom tablicom* (str. 205)

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix},$$

pri čemu je u našem slučaju $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$, tj. *matrica* je *simetrična*.

Prema matričnoj tablici drugi oblik jednačine (1)

(1′) $F(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\,x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\,y + {}$

$+ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = F_1(x, y)\cdot x + F_2(x, y)\cdot y + F_3(x, y)$.

Pojmove determinante kvadratne matrice i algebarske dopune ili kofaktora svakog elementa te determinante smatramo kao poznate (vidi gl. VI). Tako za dopunu elementa, napr. a_{12}, imamo $A_{12} = (-1)^{1+2}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$.

Pri transformaciji koordinata x, y na nove koordinate ξ, η prema obrascima $x = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha + a$, $y = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha + b$, gde su a, b koordinate novog početka i α je ugao obrtanja, dobiva se transformisana jednačina

$$f(\xi, \eta) = a'_{11}\xi^2 + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{22}\eta^2 + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0.$$

Funkcije koeficijenata, koje ne menjaju svoje vrednosti pri transformaciji koordinata, su *invarijante* u odnosu na datu transformaciju.

Jednačina (1) ima ove invarijante:

$$J_1 = a_{11} + a_{22},\quad J_2 = A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

tj. npr. $a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22}$.

Sem toga, postoji još tzv. *uslovna invarijanta*

$$S = A_{11} + A_{22} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

pod uslovima: $J_2 = 0$, $J_3 = 0$.

Klasifikacija krivih drugoga reda, prema vrednostima navedenih invarijanata, može se prikazati ovom tablicom.

	$J_2 \neq 0$ Kriva sa centrom		$J_2 = 0$ Kriva bez centra		
	$J_2 > 0$	$J_2 < 0$			
$J_3 \neq 0$ Kriva	1 $J_1J_3 < 0$ stvarna elipsa; 2 $J_1J_3 > 0$ imaginarna elipsa	4 hiperbola	6 Parabola		
$J_3 = 0$ Skup dve prave	Neparalelne prave		Paralelne prave		
	3 Imaginarne	5 stvarne	7 $S > 0$ imaginarne	8 $S < 0$ stvarne	9 $S = 0$ dvostruka prava

Pošto se znak uslovne invarijante S, usled veze $SA_{22} = A_{12}^2 + A_{22}^2$, poklapa sa znakom $A_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}^2$, karakter paralelnih pravih može se odrediti ne samo znakom invarijante S, već i znakom veličine A_{22}.

Nabrojimo sad kanonične jednačine onih krivih drugoga reda, koje odgovaraju brojevima tablice.

1. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$, $(-x^2/a^2 - y^2/b^2 + 1 = 0)$. Stvarna elipsa.

2. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1 = 0$, $(-x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0)$. Imaginarna elipsa.

3. $x^2/a^2+y^2/b^2=0$. Dve imaginarne prave. Stvarna tačka $(x=y=0)$.

4. $\pm x^2/a^2 \mp y^2/b^2-1=0$, $(\mp x^2/a^2 \pm y^2/b^2+1=0)$. Hiperbola.

5. $x^2/a^2-y^2/b^2=0$. Dve prave koje se seku.

6. $y^2-2px=0$. Parabola.

7. $x^2+1=0$. Dve paralelne imaginarne prave.

8. $x^2-1=0$. Dve paralelne prave.

9. $x^2=0$. Dve prave koje se poklapaju.

Određivanje krive sa centrom

Centar krive je tačka koja polovi sve tetive koje prolaze kroz tu tačku. Koordinate centra krive (1) se određuju iz uslova:

$$(2) \qquad \begin{aligned} F_1 &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0,\\ F_2 &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0. \end{aligned}$$

Ovaj sistem jednačina može: 1. imati određeno rešenje kad je $J_2 \neq 0$. Kriva je sa centrom. 2. nemati rešenja kad je $J_2=0$, $J_3 \neq 0$. Kriva je bez centra. 3. imati beskrajno mnogo rešenja kad je $J_2=0$, $J_3=0$. Kriva degeneriše u dve paralelne prave sa g. m. centara — pravom linijom.

Posle transformacije koordinata u odnosu na nove ose $O'\xi\eta$, paralelne starim sa početkom u centru O', jednačina (1) dobiva tzv. *centralni oblik:*

$$a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2+J_3/J_2=0.$$

Posle druge transformacije koordinata, posle prelaza na tzv. *glavne ose $O'XY$*, imamo

$$a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2+J_3/J_2 \equiv \lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+J_3/J_2=0,$$

gde su, prema vrednostima invarijanata J_1 i J_2, λ_1 i λ_2 rešenja tzv. *karakteristične jednačine*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-J_1\lambda+J_2=0,$$

čiji su koreni uvek realni.

Posle zamene $\lambda_{1,2}=-\dfrac{J_3}{J_2}\cdot\dfrac{1}{r^2_{1,2}}$ dolazimo do *kanoničnog oblika jednačine krive sa centrom* $X^2/r_1^2+Y^2/r_2^2-1=0$; r_1 *i* r_2 su glavne poluose krive. U vezi sa znacima korena $\lambda_{1,2}$, odnosno veličina $r^2_{1,2}$, imamo: elipsu, realnu ili imaginarnu, ili hiperbolu. Pri $J_3=0$ imamo degenerativne slučajeve: tačku ili dve prave koje se seku. Za ugaoni koeficijent $m_{1,2}$ glavne ose, što odgovara korenu $\lambda_{1,2}$, imamo $m_{1,2}=\dfrac{1}{a_{12}}(\lambda_{1,2}-a_{11})=$ $=\dfrac{a_{12}}{\lambda_{1,2}-a_{22}}$.

Ugao α poluose r_1 na OX osi može se odrediti iz jednačine $\operatorname{tg} 2\alpha=\dfrac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$.

Određivanje krive bez centra

Pod uslovima $J_2=0$, $J_3 \neq 0$ opštoj jednačini (1) odgovara *parabola*, kriva bez centra, sa *kanoničnom jednačinom* $Y^2-2pX=0$, gde je p njen parametar sa vrednošću $p=\sqrt{-J_3/J_1^3}$. Osa simetrije $O'X$ parabole se određuje jednačinom

$$(*) \qquad a_{11}x+a_{12}y+R=0,$$

gde je $R=\dfrac{a_{11}(a_{11}a_{13}-a_{12}a_{23})}{a^2_{11}+a^2_{12}}$. Teme O' parabole se nalazi u preseku prave (*) i prave sa jednačinom $b_1x+b_2y+b_0=0$, gde su

$$b_1=2(a_{11}R-a_{11}a_{13}),\quad b_2=2(a_{12}R-a_{11}a_{23}),\quad b_0=R^2-a_{11}a_{33}.$$

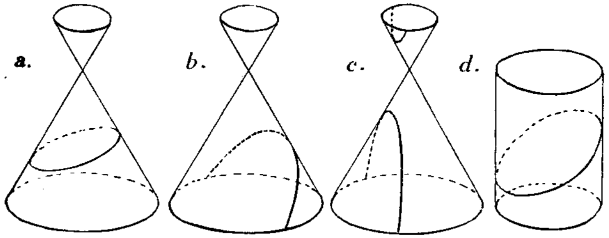
U izuzetnom slučaju, kad su $b_1=0$, $b_2=0$, a to znači $R=a_{13}$ i $b_0=a^2_{13}-a_{11}a_{13}=-A_{22}$, imamo dve paralelne prave sa jednačinom

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})^2+A_{22}=0.$$

Pošto A_{22} i S imaju isti znak, navedena jednačina određuje karakter i položaj para paralelnih pravih.

Kriva drugoga reda kao konusni presek

Krive drugoga reda mogu se dobiti kao preseci površine pravog kružnog konusa i ravni (sl. 20). Konusnu površinu uzimamo produženu i na drugu stranu od vrha; prema tome imamo dva krila konusne površine.



Sl. 20 — Konusni preseci

U preseku ravni samo sa jednim krilom, kad ravan seče sve proizvodilje — imamo elipsu odnosno krug, a kad postoji proizvodilja paralelna ravni preseka — parabolu. Kad ravan seče oba krila imamo hiperbolu. Kad ravan prolazi kroz vrh i 1. ne seče konusnu površinu imamo tačku, a kad 2. seče — imamo drugi degenerativni slučaj — dve prave sa presekom u vrhu. Najzad, kad se konusna površina pretvara u površinu kružnog cilindra, preseci su: elipsa, odnosno krug, i dve paralelne prave. Presek u obliku dvostruke prave odgovara slučaju kad poluprečnik kruga vodilje konusa, odnosno cilindra, teži nuli.

2.5. Neke algebarske i transcendentne krive

Algebarska jednačina n-toga reda

(1) $$P_n(x, y) = 0,$$

gde je $P_n(x, y)$ polinom n-tog stepena po x i y, određuje *algebarsku funkciju* $y(x)$ u *rešenom, eksplicitnom obliku* $y = f(x)$, kad se jednačina (1) pretvara u identitet

$$P_n(x, y(x)) \equiv 0$$

za sve vrednosti x u određenoj oblasti. Ako algebarsku funkciju $y(x)$ ne možemo izraziti obrascem, jednačina (1) određuje algebarsku funkciju u *nerešenom, implicitnom obliku*.

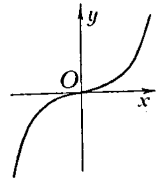
Funkcija $y(x)$, koja ne zadovoljava nikakvu algebarsku jednačinu, je *transcendentna funkcija*.

Proučili smo pravu liniju i konusne preseke kao algebarske krive prvog i drugog reda. Sad pređimo na nabrajanje algebarskih krivih višega reda.

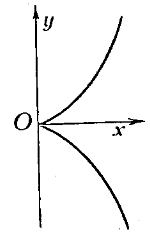
2.51. Algebarske krive višega reda

1. Funkcije stepena: $y = c\,x^n$, gde su c i n konstante (n je racionalan broj). Za $n > 0$ imamo krivu paraboličkog tipa, za $n < 0$ — hiperboličkog tipa.

Primeri: a. $y = ax^3$ (kubna parabola, sl. 21). b. $y = ax^{3/2}$ (polukubna parabola, sl. 22).



Sl. 21 — Kubna parabola



Sl. 22 — Polukubna parabola

U primenama se upotrebljavaju funkcije stepena sa $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Za crtanje tih krivih po tačkama se upotrebljava metoda slična metodi, koja je navedena na sl. 19 za slučaj $n = 2$.

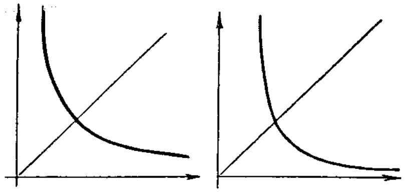
Za $n < 0$ navodimo ove slučajeve: 1. $n = -1$, obična jednakostrana hiperbola u odnosu na asimptote, kriva drugoga reda; 2. $n = -2$, hiperbola trećega reda, jer je $yx^2 = \text{const.}$ jednačina trećega reda. 3. Jednačini $yx^p = \text{const.}$ $(p > 1)$ odgovara hiperbola višeg, $(p + 1)$ — toga reda.

Primeri: a. $n = -1$, obična hiperbola. b. $n = -2$. hiperbola trećega reda (sl. 23 a, b).

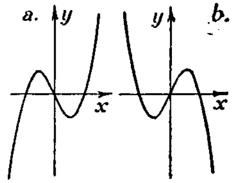
2. *Grafici polinoma* $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ su parabole opšteg oblika.

Primeri: a. $y = x^3 + cx$, b. $y = -x^3 + cx$ (sl. 24 a, b).

3. *Neke specijalne algebarske krive*. Navedimo nekoliko poznatih algebarskih krivih sa odgovarajućim jednačinama u Dekartovim i polarnim koordinatama i osobinom kao g. m. t.



Sl. 23 — Hiperbole



Sl. 24 — Parabole trećega reda

a. *Dioklesova cisoida* (sl. 25).

$$y^2(2a-x)=x^3;\quad r=2a\sin^2\theta/\cos\theta.$$

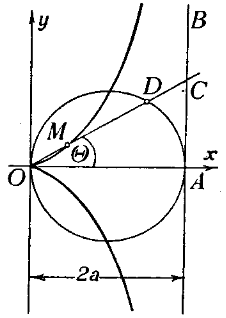
G. m. tačke M na pravoj OC na rastojanju $OM=DC$.

b. *Dekartov list* (sl. 26).

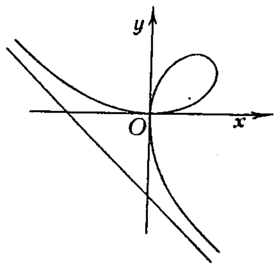
$$x^3+y^3=3axy;\quad r=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}.$$

Parametarski oblik:

$$x=3at:(1+t^3),\quad y=3at^2:(1+t^3),\quad t\,(-\infty,+\infty).$$



Sl. 25 — Dioklesova cisoida



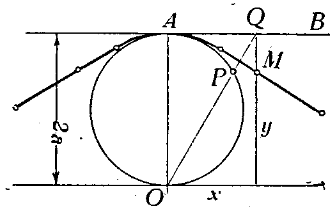
Sl. 26 — Dekartov list

c. *Agnezijev uvojak* (sl. 27). $x^2y=4a^2(2a-y)$. G. m. tačke M sa ordinatom tačke P na krugu poluprečnika a i apscisom tačke Q na pravoj AB paralelnoj osi Ox. OPQ je promenljiva prava sa stalnom tačkom O.

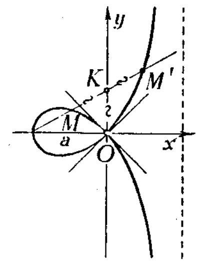
d. *Strofoida* (sl. 28).

$$(a-x)y^2=(a+x)x^2,\quad r=-\frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}.$$

G. m. tačaka M i M' na pravoj iz stalne tačke A ($OA=a$) na istim rastojanjima $KM=KM'=KO$ od preseka K te prave sa Oy osom.



Sl. 27 — Agnezijev uvojak



Sl. 28 — Strofoida

e. *Konhoida* (sl. 29).

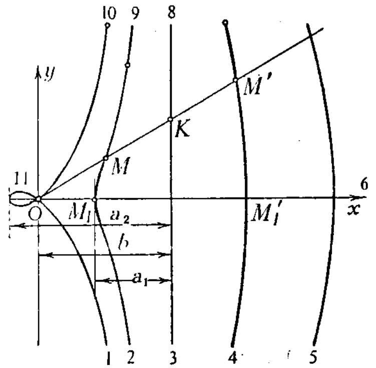
$$(x^2+y^2)(x-b)^2=a^2x^2;\quad r=b/\cos\theta\pm a.$$

G. m. tačaka M i M' na pravoj iz stalne tačke O ($OA=b$) na istim rastojanjima $KM=KM'=a$ od preseka K te prave sa pravom $x=b$.

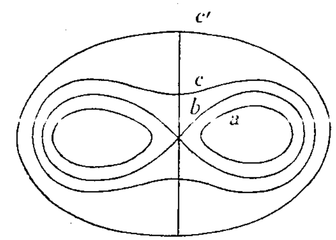
f. *Kasinijeve ovale* (sl. 30).

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4;$$

$$r^2=c^2\cos 2\theta\pm\sqrt{c^4\cos^2 2\theta-(c^4-a^4)}.$$



Sl. 29 — Konhoida



Sl. 30 — Kasinijeve ovale. Bernulijeva lemniskata

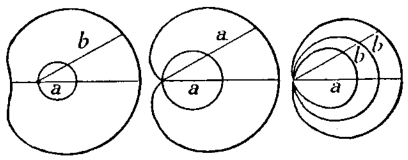
G. m. t. M za koju proizvod $r_1 r_2$ dva fokalna potega $r_1 = F_1 M$, $r_2 = F_2 M$ sa $F_1 F_2 = 2c$ ima stalnu vrednost a^2, tj. $r_1 r_2 = a^2$. Specijalni slučajevi: α. $a < c$, dva odvojena dela. β. $a > c$, zatvoreni oblik. γ. $a = c$, dva dela se spajaju u jednoj tački. *Bernulijeva lemniskata*. čija je jednačina

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0, \quad r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

g. *Paskalov puž*. (sl. 31).

$$x^2 + y^2 = ax + b\sqrt{x^2 + y^2}; \qquad r = a\cos\theta + b.$$

G. m. tačke M odnosno M' na pravoj tetive OP iz tačke P na stalnom rastojanju $PM = b$ odnosno $PM' = |b|$. Kada je $b = a$, imamo *kardioidu* $r = a(1 + \cos\theta)$.



Sl. 31 — Paskalov puž. Kardioida

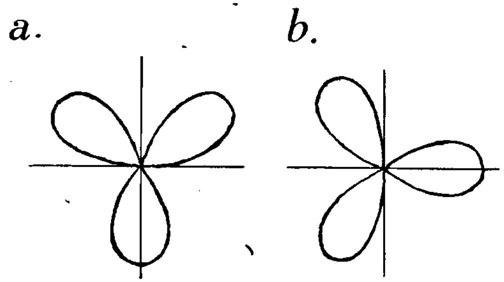
h. *Krive cveta sa listićima*. Naročitu vrstu algebarskih krivih čine krive, čije su jednačine u polarnim koordinatama vrlo jednostavne. To su krive u obliku cvetića sa nekoliko listića. Navedimo nekoliko takvih krivih.

α. Cvet sa tri listića (sl. 32 a, b).

$$r = a \sin 3\theta; \quad (x^2 + y^2)^2 = ay(3x^2 - y^2),$$

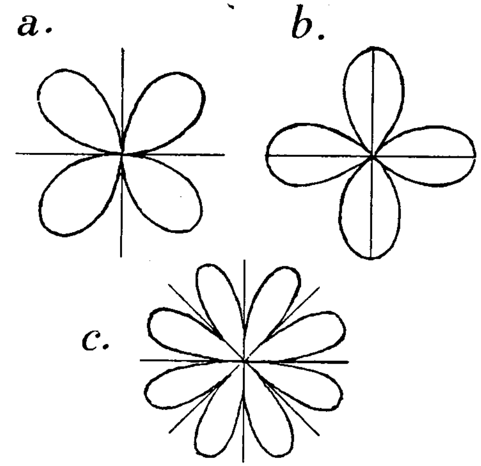
$$r = a \cos 3\theta; \quad (x^2 + y^2)^2 = ax(x^2 - 3y^2).$$

Krive su četvrtoga reda.



Sl. 32 a, b — Dva trolistnika

β. Bez izvođenja algebarske jednačine u Dekartovim koordinatama spomenimo još ove krive: 1. $r = a \sin 2\theta$ i 2. $r = a \cos 2\theta$ — dva četvorolistnika (sl. 33 a, b) i 3. $r = a \sin 4\theta$ — osmolistnik (sl. 33c).



Sl. 33 a, b, c — Dva četvorolistnika i osmolistnik

2.52. Neke transcendentne krive

1. *Eksponencijalne krive*. Jednačine $y = a^x$ ili

$$y = Ca^x \ (a > 0).$$

Specijalan važan slučaj: $y = e^x$ ili

$$y = Ce^x \ (e \approx 2{,}718281828459 \approx 2{,}718),$$

gde je e osnova prirodnih logaritama. Grafici ovih funkcija su poznati iz Elementarne matematike (sl. 34).

2. Funkcija inverzna eksponencijalnoj je *logaritamska* (sl. 35). Važni slučajevi: dekadni ili Brigzov logaritam, sa osnovom 10 i prirodan ili Neperov logaritam, sa osnovom e.

3. *Hiperboličke funkcije*:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2e^x}(e^{2x} - 1),$$

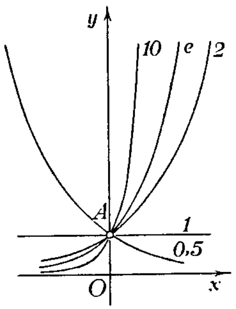
$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2e^x}(e^{2x}+1),$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

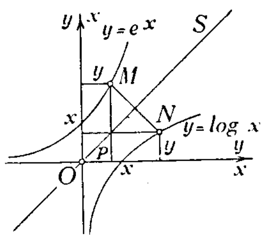
Između tih funkcija postoje ove veze:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{\cosh x}{\sinh x},$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}.$$



Sl. 34 — Eksponencijalne krive



Sl. 35 — Krive logaritama

4. *Areafunkcije.* Funkcije inverzne hiperboličkim funkcijama su *areafunkcije.* Oznaka $y = Ar \sinh x$ (čita se: Area sinus hyperbolicus). Inverzija $x = \sinh y$. Naziv Area—površina, sleduje iz geometrijskog tumačenja površine hiperbolijskog sektora (str. 192). Vrednosti:

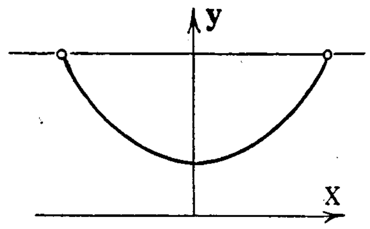
$$\operatorname{Ar}\sinh x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

$$\operatorname{Ar}\cosh x = \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geqslant 1,$$

$$\operatorname{Ar}\operatorname{tgh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\operatorname{Ar}\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}, \quad -1 \geqslant x \geqslant 1.$$

5. *Lančanica* (sl. 36). $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $a > 0$. G. m. t. teškog konca, stalne linearne gustine, učvršćenog u dvema tačkama.

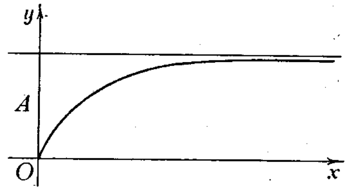


Sl. 36 — Lančanica

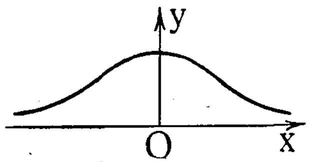
6. *Kriva saturacije* (sl. 37). $y = a(1 - e^{-k^2 x})$. Kad $x \to \infty$, y teži a.

7. *Kriva verovatnoće* (sl. 38). $y = ae^{-x^2}$. Kad $x \to \infty$, y teži 0.

8. *Spirale*: α. *Arhimedova* (sl. 39α). $r = a\theta$. β. *Hiperbolička* (sl. 39β). $r = a\theta^{-1}$. γ. *Parabolička* (sl. 39γ), $(r-a)^2 = 4ac\theta$. δ. *Logaritamska* (sl. 39δ), $r = ae^{m\theta}\,(m > 0)$. ε. *Žezlo* (sl. 39ε), $r^2\theta = a^2$.



Sl. 37 — Kriva saturacije



Sl. 38 — Kriva verovatnoće

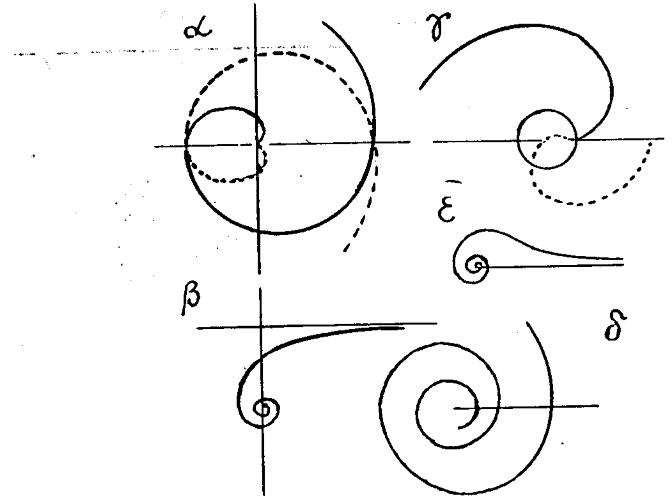
9. *Cikličke krive.* Krug k poluprečnika r se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj osnovi, pravoj ili krugu K poluprečnika R, spolja ili unutra. Tačka M, čvrsto vezana za krug k, opisuje krivu, koja se zove *cikiička kriva* (*ciklida*).

a. Ako je osnova prava, tačka M opisuje *trohoidu* (sl. 40). Može biti tri slučaja: α. *Cikloida.* Jednačine u parametarskom obliku: $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$. β. *Razvučena cikloida.* Jednačine: $x = r(t - \varepsilon \sin t)$, $y = r(1 - \varepsilon \cos t)$, $\varepsilon < 1$. γ. *Zbijena cikloida.* Jednačine: iste kao prethodne sa $\varepsilon > 1$. Parametar t označava ugao obrtanja kruga k, meren u radijanima.

b. Krug k se kotrlja po krugu K spolja. Kriva se zove *epicikloida* (sl. 41). Jednačine u parametarskom obliku

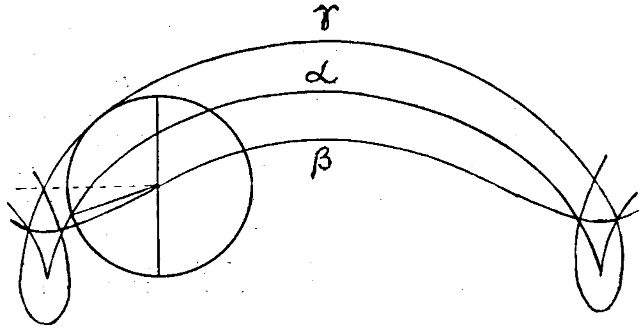
$$x = r(m_1 \sin\psi - \sin m_1\psi), \quad y = r(m_1 \cos\psi - \cos m_1\psi),$$

gde je $m_1=\frac{R}{r}+1$. ψ je ugao poluprečnika R tačke dodira krugova sa Oy osom.



Sl. 39 — Spirale. α. Arhimedova; β. Hiperbolička; γ. Parabolička; δ. Logaritamska; ε. Žezlo

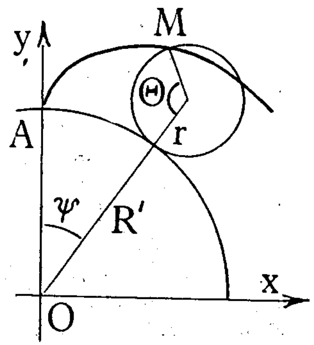
c. Krug k se kotrlja po krugu K unutra $(R>r)$. Kriva se zove *hipocikloida* (sl. 42). Jednačine: $x=r(m_2\sin\psi - \sin m_2\psi)$, $y=r(m_2\cos\psi+\cos m_2\psi)$, gde je $m_2=\frac{R}{r}-1$.



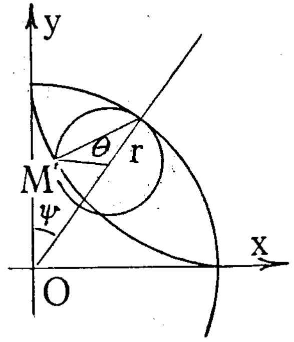
Sl. 40 — Trohoide. Cikloide: α. Obična; β. Razvučena; γ. Zbijena

Kao i cikloida epicikloida i hipocikloida mogu biti i razvučene i zbijene u vezi sa položajem tačke M, koja crta krivu; tačka kruga k daje razvučene krive, a van toga kruga zbijene.

Ako su poluprečnici r i R samerljivi, posle određenog, konačnog broja obrtanja, pokretni krug k se vraća istom



Sl. 41 — Epicikloida



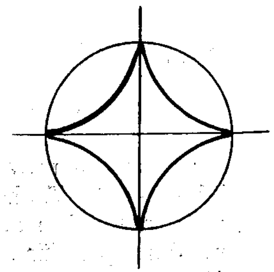
Sl. 42 — Hipocikloida

tačkom svoje periferije u istu tačku periferije nepokretnog kruga K. U ovom slučaju ciklida je algebarska kriva; u slučaju nesamerljivosti kriva je transcendentna. Vredi spomenuti dva specijalna slučaja:

1. Pri $r=R$ epicikloida se pretvara u *kardioidu*.
2. Pri $r=\frac{1}{4}a$ hipocentroida uzima oblik *centroide* (sl. 43)

sa jednačinom u Dekartovim koordinatama $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, u parametarskom ob'iku: $x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$.

Geometrija cikličkih krivih stoji u neposrednoj vezi sa kretanjem jednog objekta prema drugom, kruga prema pravoj ili jednog kruga prema drugom. Teorija kretanja, *kirematika*, uči da svakcm kretanju odgovara *obratno, inverzno kretanje*; u našem slučaju to su kretanja prave po krugu i ranije nepokretnog kruga K po krugu k, koji je sad nepomičan. Takva obratna kretanja su izvor novih krivih. Ovde nećemo ulaziti u pro-

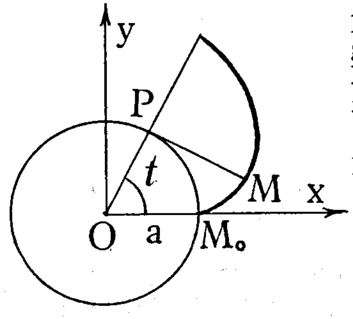


Sl. 43 — Centroide

učavanje svih tih krivih, već ćemo se zaustaviti na proučavanju kotrljanja prave po krugu. Tačka M prave koja se kotrlja bez klizanja po krugu poluprečnika a iz svog početnog položaja M_0 na Ox osi opisuje krivu koja se zove *evolventa kruga* (sl. 44). Parametarske jednačine:

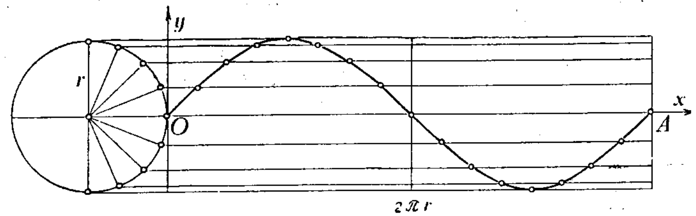
$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

To je transcendentna kriva. Dužina tangente PM do preseka sa evolventom jednaka je dužini luka $M_0 P$.



Sl. 44 — Evolventa kruga

10. Sinusoide. Sinusoida je poznati grafik funkcije $y = \sin x$, gde su x i y apstraktni brojevi koji se prikazuju na grafiku dužinama, merenim istom jedinicom. Grafička konstrukcija (sl. 45). Krug proizvoljnog poluprečnika r se deli od tačke O na krugu na $n = 4k$ (k je broj delova jednog kvadranta) jednakih delova. Tangenta na krug u tački O je Oy osa sistema Oxy. Kroz tačke podele se povuku prave paralelne Ox osi (paralele) i numerišu prema redu na krugu. Od tačke O na Ox osi se odmeri dužina $p = 2\pi r = OA$ i podeli se na n jednakih delova, kroz tačke



Sl. 45 — Grafička konstrukcija sinusoide

podele se povuku prave paralelne Oy osi (vertikale) i numerišu od tačke O. Tačke preseka paralele i vertikale sa istom numerom pripadaju sinusoidi. Spajanje tih tačaka neprekidnom linijom daje približnu sliku grafika sinusoide, konstruisanog po tačkama. Sinusoida, kao neprekidna linija, lako se dobiva

kinematičikim postupkom, koji se široko primenjuje u tehnici i služi za ocenjivanje kretanja raznolikih mašina. Taj postupak ostvaruje sinusoidu kao g. m. tačke koja u isto vreme vrši ravnomerno kretanje po krugu i ravnomernu translaciju na hartiji u stalnom pravcu.

Sinus je periodična funkcija sa periodom 2π. Prema tome za funkciju $y = \sin x$ jedan sinusni talas (breg i dolina) ima dužinu $l = 2\pi r$, gde je r dužina izabrana za jedinicu. Jednačini $y = \sin (kx)$, gde je k apstraktni broj, odgovara sinusni talas dužine $l_k = k\, l$. Za $k > 1$ sinusoida je *razvučena*, a za $k < 1$ — *zbijena*.

U opštoj formi jednačina sinusoide obično se izražava ovako

$$(1) \qquad y = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right),$$

gde su: a— visina ili amplituda sinusoide, $2\pi \frac{t}{T} = \varphi$ promenljivi deo faze $(\varphi + \varphi_0)$ sinusoide, φ_0— početna faza, t—nezavisno promenljiva, koja se odmerava na Ox osi, T— stalna veličina, iste dimenzije kao i t. Pošto svakoj sinusoidi odgovara harmonijska oscilacija sa jednačinom (1), gde je t vreme i T period oscilacije, analogno se i za sinusoidu uvode ove konstante: $n = \frac{1}{T} = f$ *broj oscilacija u sekundi* ili *frekfencija*, $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega$ *kružna frekvencija*, odnosno ugaona brzina obrtnog kretanja tačke po krugu. Sa novim konstantama jednačina (1) sinusoide se može zameniti jednom od ovih:

$$y = a \sin (\omega t + \varphi_0) = a \sin (2\pi f t + \varphi_0) = a \sin (2\pi n t + \varphi_0).$$

Primetimo da se proučavanje *kosinusoide*, grafika funkcije $y = \cos x$, svodi na proučavanje sinusoide, jer jedna prelazi u drugu sa promenom početne faze, a to znači sa pomeranjem grafika u pravcu Ox odnosno Ot ose.

Klasa trigonometrijskih funkcija sa promenljivim amplitudama i frekvencijama igra, u pojedinosti ili u *zbirovima*,

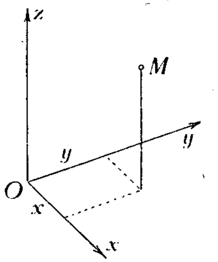
konačnim ili *beskonačnim* (*Furijeovim*), prvorazrednu ulogu u Matematici, teorijskoj i primenjenoj. Pomoću tih funkcija se mogu proučavati i one funkcionalne veze, koje su teško pristupačne za proučavanje pomoću drugih matematičkih sredstava.

B. ANALITIČKA GEOMETRIJA U PROSTORU

2.6. Koordinate tačke u prostoru. Osnovni obrasci

Koordinate tačke u prostoru su tri broja koji određuju položaj tačke u odnosu na izabrane geometrijske elemente tog prostora. Postoji više načina za takvo određivanje.

1. *Dekartov sistem.* Osnovni elementi u tom sistemu su tri ortogonalne ose sa zajedničkom tačkom; to je tzv. *Dekartov trijedar*. Zajednička tačka O osa je *početak koordinatnog sistema*. Uzmimo desni red koordinatnih osa Ox, Oy, Oz (sl. 46). Ravni Oyz, Ozx, Oxy su *koordinatne ravni sistema*. Uvodimo oznake: M — proizvoljna tačka u prostoru; $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ — vektor položaja tačke M u odnosu na tačku O; α, β, γ — uglovi vektora položaja $\overrightarrow{OM}$ sa koordinatnim osama; l, m, n — veličine proporcionalne kosinusima prethodnih uglova, *ugaoni koeficijenti pravca* vektora $\overrightarrow{OM}$, k je koeficijent proporcionalnosti, tj. napr. $l=k\cos\alpha$.



Sl. 46 — Dekartov trijedar

Dekartove koordinate x, y, z tačke M u prostoru su algebarske vrednosti projekcija vektora položaja $\overrightarrow{OM}$ na koordinatne ose:

$$x=r\cos\alpha,\quad y=r\cos\beta,\quad z=r\cos\gamma.$$

$$\therefore\quad r^2=x^2+y^2+z^2;\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1;$$

$$l:\cos\alpha=m:\cos\beta=n:\cos\gamma;$$

Tačku čije su koordinate x, y, z označavaćemo sa $M(x, y, z)$.

Za dve tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ na $\overrightarrow{OM}$:

$$\frac{x_2-x_1}{l}=\frac{y_2-y_1}{m}=\frac{z_2-z_1}{n}=\frac{r_2-r_1}{k},$$

gde su: r_1 i r_2 odgovarajuće algebarske vrednosti, u poređenju sa smerom vektora položaja, rastojanja tačaka M_1 i M_2 od početka koordinata i k koeficijent proporcionalnosti.

O primeni vektorskog predstavljanja $\overrightarrow{OM}=xe_1+ye_2+ze_3$ vidi str. 16.

Pojam Dekartovih koordinata se uopštava na slučaj prostora sa n dimenzija. Koordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tačke M se odnose na zamišljeni n-edar sa ortogonalnim jediničnim vektorima $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Tada je

$$\overrightarrow{OM}=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i.$$

Tačka M, koja deli rastojanje M_1M_2 u datom odnosu $\lambda=M_1M:MM_2$, ima koordinate:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

a sredina te duži:

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad z=\frac{1}{2}(z_1+z_2).$$

Rastojanje d između tačaka M_1 i M_2 se određuje iz jednačine

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

Transformacija pravouglih koordinata. 1. slučaj. x, y, z polazne koordinate u odnosu na trijedar $Oxyz$, nov trijedar $O'xyz$ se razlikuje samo novim položajem početka $O'(a, b, c)$:

$$x=x'+a,\quad y=y'+b,\quad z=z'+c.$$

2. Slučaj. Ose trijedara imaju isti početak O, ali različite pravce osa: $Oxyz$ i $Ox'y'z'$. α_{ik} je oznaka kosinusa ugla između i-te ose prvog trijedra i k-te ose drugog trijedra. Tada je:

$$\begin{aligned} x&=\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+\alpha_{13}z', & x'&=\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z,\\ y&=\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+\alpha_{23}z', & y'&=\alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z,\\ z&=\alpha_{31}x'+\alpha_{32}y'+\alpha_{33}z'; & z'&=\alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z. \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OM}=xe_1+ye_2+ze_3,\qquad \overrightarrow{OM}=x'e_1'+y'e_2'+z'e_3'.$$

$$\alpha_{ik}=(e_i, e_k').$$

Uslovi ortogonalnosti i jediničnosti ortova e_1, e_2, e_3 su:

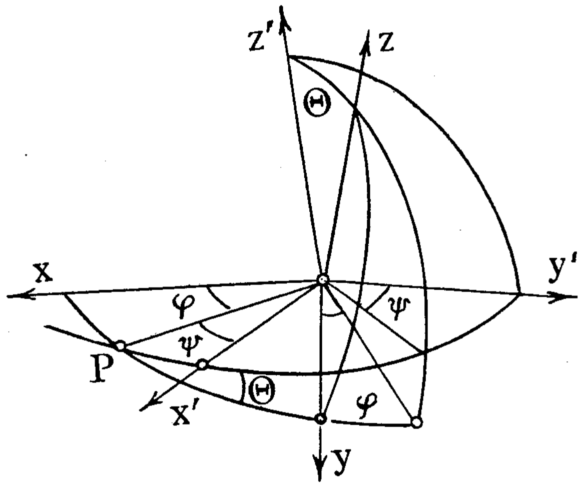
$$\alpha_{i1}\alpha_{k1}+\alpha_{i2}\alpha_{k2}+\alpha_{i3}\alpha_{k3}=\begin{cases}0 \text{ za } i\neq k \text{ (ortogonalnost)}\\ 1 \text{ za } i=k \text{ (jediničnost)}.\end{cases}$$

$\therefore$ Uslovi za ortove e_1', e_2', e_3' su $=\alpha_{1i}\alpha_{1k}+\alpha_{2i}\alpha_{2k}+\alpha_{3i}\alpha_{3k}=$

$$=\begin{cases}0 \text{ za } i\neq k \text{ (ortogonalnost)}\\ 1 \text{ za } i=k \text{ (jediničnost)}.\end{cases}$$

3. slučaj. Prelaz od trijedra $Oxyz$ na trjedar $O'\ x'\ y'\ z'$ se vrši neposrednom uzastopnom primenom transformacija prvog i drugog slučaja.

Ajlerovi uglovi. Pošto između devet kosinusa α_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ postoji šest nezavisnih jednačina, svi kosinusi se



Sl. 47 — Ajlerovi uglovi

mogu izraziti pomoću samo tri parametra; za takve parametre se mogu uzeti tri *Ajlerova ugla* φ, ψ, θ prema ovoj slici (sl. 47). Trijedar $Oxyz$ se dovodi u položaj trijedra $Ox'y'z'$ pomoću tri obrtanja: I. Oko ose Oz za ugao φ, pri tome osa Ox zauzima položaj ose OP. II. Oko ose OP za ugao θ između Oz i Oz' ose. III. Oko ose Oz za ugao ψ između OP ose i ose Ox'. Kao što je poznato, na osnovu obrasca

sferne trigonometrije $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, gde su a, b, c, strane sfernog trougla i A ugao naspram strane a, mogu se izvesti vrednosti kosinusa α_{ik} u funkciji Ajlerovih uglova.

$$\alpha_{11}=\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\cos\theta,$$

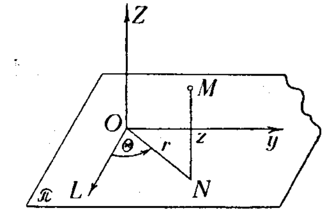
$$\alpha_{12}=-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi\cos\theta,\quad \alpha_{13}=\sin\psi\sin\theta;$$

$$\alpha_{21}=\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\cos\theta,$$

$$\alpha_{22}=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\cos\theta,\quad \alpha_{23}=-\cos\psi\sin\theta;$$

$$\alpha_{31}=\sin\varphi\sin\theta,\quad \alpha_{32}=\cos\varphi\sin\theta,\quad \alpha_{33}=\cos\theta.$$

2. *Polarno—cilindarski sistem.* Osnovni elementi: *orijentisana ravan* π (sl. 48), tj. ravan sa označenim licem i naličjem, u toj ravni *polarna poluosa* OL i tačka O *pol sistema. Polarno-cilindarske koordinate* su: 1. rastojanje z tačke M od ravni π, sa odgovarajućim znakom prema orijentaciji ravni; 2. rastojanje r projekcije N tačke M u ravni π od pola O; 3. ugao θ između potega r i poluose OL pri čemu se taj ugao računa od poluprave OL u levom sistemu u smislu kretanja kazaljke na časovniku, u desnom sistemu — suprotno tom smeru. Oblasti promene: r od 0 do $+\infty$, z od $-\infty$ do $+\infty$, θ od 0 do 2π. U Mehanici za proučavanje neprekidne promene uvodi se algebarska vrednost koordinate r sa oblašću od $-\infty$ do $+\infty$ i proširuje se oblast θ od 0 do $+\infty$.

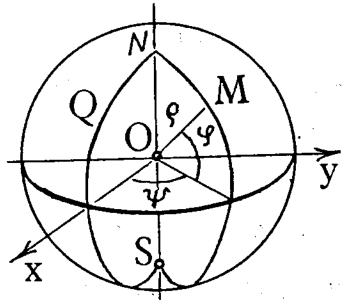


Sl. 48 — Polarno-cilindarski sistem

Pri relativnom položaju elemenata polarno-cilindarskog sistema prema Dekartovom trijedru, pokazanom na slici, imamo ove obrasce za transformaciju koordinata: od polarno-cilindarskih na Dekartove: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$ i, obratno, od Dekartovih na polarno-cilindarske —

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z=z.$$

3. *Sferni sistem koordinata.* Osnovni elementi: tačka O, *centar* sistema, (*polarna*) *osa* SON i *poluravan* (*prvi meridijan*) Q sa granicom SON (sl. 49). Ravan E, upravna na polarnoj osi kroz tačku O—*ravan ekvatora*. Ravan SNM je *meridijan* tačke M. Sferne koordinate su: 1. ρ—dužina potega OM; 2. ugao φ između potega OM i ekvatora, odgovara *geografskoj širini*; mesto njega se uzima ugao $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (*polarno rastojanje*). 3. ugao ψ između prvog meridijana i meridijana tačke M (*geografska dužina*). Oblasti promene: za ρ od 0 do $+\infty$, za ψ od 0 do 2π (ili od $-\pi$ do $+\pi$), za φ od 0 do $\pi/2$ (severna) i od 0 do $-\pi/2$ (južna). Obrasci za transformaciju:



Sl. 49 — Sferne koordinate

$$x = \rho \cos\varphi \cos\psi, \quad y = \rho \cos\varphi \sin\psi, \quad z = \rho \sin\varphi;$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \psi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2.7. Geometrijska mesta tačaka u prostoru. Površina. Linija u prostoru. Koordinatne površine i linije

Skup svih tačaka u prostoru, koje zadovoljavaju postavljene uslove, je g. m. tačaka tih uslova. Prema postavljenim uslovima g. m. t. može biti: 1. skup diskretnih tačaka; 2. linija u prostoru, 3. površina, 4. zapremina, — ili zajednica takvih elemenata. Zaustavimo se prvo na površini.

Površina se određuje analitički jednim od ovih načina: 1. Jednačinom $F(x, y, z) = 0$, 2. U rešenom obliku, recimo, jednačinom $z = f(x, y)$. 3. U parametarskom obliku jednačinama: $x = f_1(q_1, q_2)$, $y = f_2(q_1, q_2)$, $z = f_3(q_1, q_2)$ ili upotrebom Gausovih parametara u i v, umesto parametara q_1 i q_2, u obliku: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. 4. U vektorskom obliku $\vec{r} = \vec{f}(u, v)$, gde je $\vec{f}$ simbol vektor-funkcije.

Linija u prostoru se određuje ovako: 1. Sa dve jednačine $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, kao presek dve površine. 2. Jednačinama cilindarskih površina $y = y(x)$, $z = z(x)$; prva jednačina odgovara projekciji date linije u prostoru na Oxy ravan, a druga na Oxz ravan. 3. U parametarskom obliku $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, gde je t proizvoljan parametar. U specijalnom vrlo zgodnom parametarskom obliku $x = \varphi_1(s)$, $y = \varphi_2(s)$, $z = \varphi_3(s)$, gde je s dužina luka krive, računata od određene tačke na krivoj. 4. U vektorskom obliku $\vec{r} = \vec{f}(t)$ odnosno $\vec{r} = \vec{f}(s)$.

Pri prelazu od proizvoljnih koordinata q_1, q_2, q_3, na Dekartove x, y, z tačke M u prostoru ili obrnuto, treba da budu poznate jednačine transformacije:

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z)$$

ili

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = f_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = f_3(q_1, q_2, q_3).$$

Ako stavimo u te jednačine $q_1 = \text{const}$, dobićemo jednačinu koordinatne površine na kojoj se menjaju parametri q_2 i q_3 — krivolinijske koordinate tačke na toj površini. Kroz svaku tačku prostora prolaze tri koordinatne površine: $q_1 = \text{const.}$, $q_2 = \text{const.}$, $q_3 = \text{const.}$ Te tri površine se seku duž tri koordinatne linije, na svakoj od kojih se menja samo jedan parametar. Npr. prvoj koordinatnoj liniji odgovaraju jednačine: $x = f_1(q_1, C_2, C_3)$, $y = f_2(q_1, C_2, C_3)$, $z = f_3(q_1, C_2, C_3)$.

U Dekartovom sistemu koordinatne površine su tri ravni, koje prolaze kroz tačku $M(x, y, z)$; koordinatne linije su prave paralelne osama Ox, Oy, Oz.

U polarno-cilindarskom sistemu koord. površ. su: $r = \text{const.}$ — površina valjka (cilindra) poluprečnika r, $\theta = \text{const.}$—ravan koja prolazi kroz osu Oz, $z = \text{const.}$ ravan paralelna sa Oxy ravni. Koordinatne linije: za r prava koja prolazi kroz datu tačku i stoji upravno na Oz osu, za θ—krug, za z—prava paralelna Oz osi.

Za sferni sistem koordinatne površine su: 1. sfera poluprečnika ρ, 2. poluravan meridijana za $\psi = \text{const.}$ 3. konusna površina sa proizvodiljom pod uglom $\varphi = \text{const.}$ prema ekvatoru. Koordinatne linije: 1. za r—prava koja prolazi kroz centar, 2. ψ—mali krug na sferi, 3. za φ—veliki krug u ravni meridijana.

2.71. Ravan. Jednačina ravni

Jednačina ravni: 1. $z=ax+by+c$; z je funkcija prvog stepena po x i y. 2. Opšti oblik: $a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$. 3. Jednačina sa odsečcima: $x/p+y/q+z/r=1$. 4. Normalni oblik: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=n$, gde je n dužina normale spuštene iz početka koordinata na ravan, α, β, γ—uglovi te normale sa koordinatnim osama. 5. Vektorski oblik: $(\vec{r}\ \vec{N})+D=0$, gde su: $\vec{r}$ vektor-položaja proizvoljne tačke M u ravni u odnosu na tačku O, $\vec{N}$—dati vektor u prostoru, normalan na datoj ravni, D—dati skalar.

Veze između parametara položaja ravni:

$$a=-a_1/a_3,\ b=-a_2/a_3,\ c=-a_4/a_3;$$

$$p=-a_4/a_1,\ q=-a_4/a_2,\ r=-a_4/a_3;$$

$$a_1:\cos\alpha=a_2:\cos\beta=a_3:\cos\gamma=a_4:-n=\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2};$$

$$\vec{N}(a_1, a_2, a_3),\ D=a_4.$$

Specijalni položaji ravni prema vrednostima koeficijenata a_1, a_2, a_3, a_4. 1. $a_1=0$ — ravan je paralelna sa Ox osom; 2. $a_1=a_2=0$ — ravan je paralelna sa Oxy ravni. 3. $a_4=0$, ravan prolazi kroz početak koordinatnih osa. 4. $a_1=a_4=0$, ravan prolazi kroz Ox osu. 5. $a_1=a_2=a_4=0$, ravan Oxy. Sa drugim kombinacijama koeficijenata položaj ravni se određuje prema prethodnom.

2.711. Zadaci

1. Jednačina ravni kroz datu tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)=M(\vec{r}_0)$. U skalarnom obliku: $a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0)=0$, $(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{N})=0$; a_1, a_2, a_3 odnosno vektor $\vec{N}$ su proizvoljni.

2. Jednačina ravni kroz tri date tačke: $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$, $M_3(\vec{r}_3)$. U vektorskom obliku: $((\vec{r}-\vec{r}_1)[(\vec{r}_2-\vec{r}_1)(\vec{r}_3-\vec{r}_1)])=0$,

$$\text{u skalarnom } \triangle=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

3. Rastojanje d tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$ od ravni: $d=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-n$; uslovi: 1. $d=0$, tačka M_0 je u ravni; 2. $d<0$, tačka M_0 i početak koordinata, tačka O, su sa iste strane od ravni; 3. $d>0$, tačke M_0 i O su sa različitih strana od ravni.

4. Jednačina ravni kroz presek dve date ravni sa jednačinama: (1) $a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$, (2) $b_1x+b_2y+b_3z+b_4=0$. Jednačina (3) $a_1x+a_2y+a_3z+a_4+\lambda(b_1x+b_2y+b_3z+b_4)=0$, gde je λ proizvoljan broj.

4_1. Jednačina ravni kroz presek ravni (1) i (2) koja prolazi kroz tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ van tih ravni; jednačina (3) sa $\lambda=-(a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0+a_4):(b_1x_0+b_2y_0+b_3z_0+b_4)$.

5. Uslov da četiri tačke pripadaju istoj ravni. U determinanti $\triangle$ koordinate x, y, z treba zameniti koordinatama četvrte tačke x_4, y_4, z_4.

6. Jednačina ravni koja prolazi kroz dve date tačke $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$ i stoji paralelno sa datim pravcem, koji je određen vektorom pravca $\vec{L}(l, m, n)$. U vektorskoj formi: $(\vec{r}-\vec{r}_1, [\vec{r}-\vec{r}_2, \vec{L}])=0$, u skalarnoj $\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1\\ x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1\\ l & m & n\end{vmatrix}=0$.

6_1. Jednačina ravni kroz tačku $M_0(\vec{r}_0)$ paralelna sa dva pravca, određena vektorima $\vec{L}_1$ i $\vec{L}_2$. U vektorskoj formi: $(\vec{r}-\vec{r}_0, [\vec{L}_1\vec{L}_2])=0$, u skalarnoj $\begin{vmatrix} x-x_0, & y-y_0, & z-z_0\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0$.

2.72. Prava. Jednačine prave

1. Prava kao presek dve ravni; sistem od dve jednačine

$$(1)\quad \begin{matrix} a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0, \\ b_1x+b_2y+b_3z+b_4=0, \end{matrix} \quad \text{ili} \quad \begin{matrix} (\vec{r}, \vec{N}_1)+D_1=0. \\ (\vec{r}, \vec{N}_2)+D_2=0. \end{matrix}$$

2. Parametarski oblik jednačina: $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{L}t$, skalarni — $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$, isto u vektorskom nerešenom obliku $[\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{L}]=0$, $\vec{L}$ je vektor pravca prave.

3. Kanonični oblik jednačina prave se zasniva na paralelnosti vektora $\vec{r}-\vec{r}_0$ i $\vec{L}$. Skalarni oblik.

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Jednakost samo dva odnosa, npr. $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ određuje ravan koja projicira pravu na odgovarajuću koordinatnu ravan, u primeru na Oxy ravan. Tumačena u ravni Oxy to je projekcija date prave u Oxy ravni.

4. Jednačine prave kroz dve date tačke: u vektorskom obliku, $[\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{r}_2-\vec{r}_1]=0$, u skalarnom $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

5. Transformacija jednačina (1) na kanonični oblik. Neka je $M(x_0, y_0, z_0)$ tačka prave, tj. x_0, y_0, z_0 su neka rešenja jednačina (1), tada su kanonične jednačine

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \text{ jer je } \vec{L}=[\vec{N}_1, \vec{N}_2].$$

6. Plikerove jednačine prave. Iz vektorske jednačine $[\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{L}]=0$ sleduje $[\vec{r}, \vec{L}]=[\vec{r}_0, \vec{L}]=G$, gde je $\vec{G}(G_1, G_2, G_3)$ stalan vektor. Skalarne jednačine

$$yn-zm=G_1, \quad zl-xn=G_2, \quad xm-yl=G_3$$

su Plikerove jednačine prave. Pošto je $(\vec{L}, \vec{G})=0$, između koordinata tih vektora postoji veza $G_1 l+G_2 m+G_3 n=0$. Svaka od Plikerovih jednačina je zaključak iz ostale dve.

2.721. Prava i ravan

Uzimajući kanonični oblik jednačina prave i jednačinu ravni u opštem obliku $a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$ proučimo nekoliko pitanja.

1. Uslov paralelnosti dve prave: $l_1:l_2=m_1:m_2=n_1:n_2$.
2. Uslov paralelnosti dve ravni: $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$.
3. Uslov paralelnosti prave i ravni: $la_1+ma_2+na_3=0$.
4. Uslov normalnosti dve prave: $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.
5. Uslov normalnosti dve ravni: $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.
6. Uslov normalnosti prave i ravni: $l/a_1=m/a_2=n/a_3$.
7. Prava leži u ravni; dva uslova:

1. $a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0+a_4=0$, 2. $la_1+ma_2+na_3=0$.

8. Presečna tačka prave $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{L}t$ i ravni $(\vec{r}\vec{N})+a_4=0$. Za tačku preseka $t=-(a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0+a_4):(la_1+ma_2+na_3)$.

9. Uslov da dve prave pripadaju istoj ravni. U vektorskom obliku $(\vec{r}_2-\vec{r}_1, [\vec{L}_1, \vec{L}_2])=0$. U skalarnom:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

10. Najkraće rastojanje između dve prave:

$$d=\frac{1}{|[\vec{L}_1, \vec{L}_2]|}((\vec{r}_2-\vec{r}_1)[\vec{L}_1, \vec{L}_2])=$$

$$=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}:\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}.$$

11. Rastojanje d tačke $M_1(\vec{r}_1)$ od prave $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{L}t$.

U vektorskom obliku: $d=\frac{|[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{L}]|}{|\vec{L}|}$.

U skalarnom:

$$d=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}:$$

$$:\sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$

12. Jednačina zajedničke normale dve date prave. Tok geometrijske konstrukcije izražene u vektorskom obliku:

Jednačina datih pravih: $[\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{L}_1]=0$, $[\vec{r}-\vec{r}_2, \vec{L}_2]=0$.

Jednačina ravni π kroz prvu pravu paralelne drugoj pravoj: $(\vec{r}-\vec{r}_1, [\vec{L}_1 \vec{L}_2])=0$.

Jednačina ravni π_1 kroz prvu pravu upravne na ravan π

$$(*) \qquad (\vec{r}-\vec{r}_1, [\vec{L}_1 [\vec{L}_1 \vec{L}_2]])=0.$$

Isto za ravan π_2 kroz drugu pravu upravnu na ravan π.

$$(**) \qquad (\vec{r}-\vec{r}_2, [\vec{L}_1 [\vec{L}_1 \vec{L}_2]]=0.$$

Zajedno jednačine (*) i (**) određuju traženu pravu. Jednačina (*) u skalarnom obliku se izražava ovako:

$$\begin{vmatrix} a-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ m_1 n_2 - m_2 n_1 & n_1 l_2 - n_2 l_1 & l_1 m_2 - l_2 m_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Slično se izražava i druga jednačina.

13. Određivanje ugla. 1. Između dve prave:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)}}$$

ili skraćeno u vektorskom obliku $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{L}_1 \vec{L}_2)}{L_1 L_2}$; 2. Između dve ravni: $\cos\varphi = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}}$, vektorski oblik $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{N}_1 \vec{N}_2)}{N_1 N_2}$; 3. Između ravni i prave:

$$\sin\varphi = \frac{|a_1 l + a_2 m + a_3 n|}{\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(l^2+m^2+n^2)}},$$

vekt. $\sin\varphi = \dfrac{|(\vec{N}\vec{L})|}{N L}$, gde je φ ugao između prave i njene projekcije na ravan.

2.8. Površina drugoga reda

Za oznaku koeficijenata jednačine drugog stepena sa tri promenljive x, y, z upotrebimo ovu kvadratnu simetričnu matricu četvrtoga reda (vidi VI)

$$\mathfrak{M} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix} \quad \text{sa uslovom } a_{ij}=a_{ji}.$$

Opšta jednačina površine drugoga reda se izražava ovako:

$$(1) \quad F(x, y, z) = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23} yz + 2a_{31} zx + 2a_{14} x + 2a_{24} y + 2a_{34} z + a_{44} = 0.$$

Proučavanje jednačine (1) dovodi do zaključka da u odnosu na transformaciju na nove koordinate x', y', z' prema ortogonalnom trijedru sa novim početkom i novim pravcima osa jednačina (1) ima ove invarijante:

$$I_1 = a_{11}+a_{22}+a_{33}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

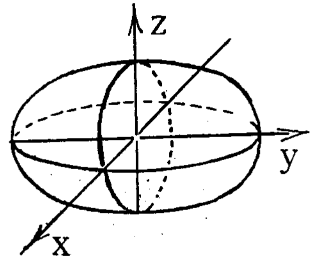
$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad I_4 = \Delta\,\mathfrak{M},$$

gde je $\Delta\,\mathfrak{M}$ determinanta četvrtoga reda napisane matrice.

Prema vrednostima navedenih invarijanata može se sastaviti ova tablica za određivanje vrste površine drugoga reda.

		$I_3 \neq 0$. Centralne površine		$I_3=0$. Površine bez centra
		$I_1 I_3 > 0$, $I_2 > 0$	Veličine $(I_1 I_3)$ i I_2 nisu obe pozit.	
$I_4 \neq 0$	$I_4 < 0$	1 Elipsoid stvarni	3 Hiperboloid dvokrilni	5 Paraboloid eliptički
	$I_4 > 0$	2 Elipsoid imaginarni	4 Hiperboloid jednokrilni	6 Paraboloid hiperbolički
$I_4 = 0$		7 Konusi		8 Cilindri. Par ravni

Navedimo sad kanonične jednačine onih površina koje odgovaraju brojevima u tablici.



Sl. 50 — Elipsoid

1. $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$. Elipsoid stvarni (sl. 50).

2. $x^2/a^2+y_2/b^2+z^2/c^2=-1$. Elipsoid imaginarni.

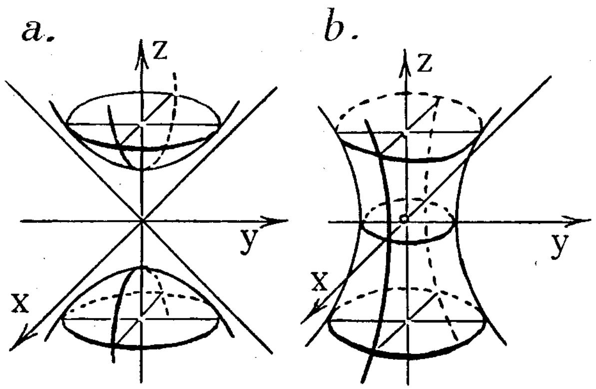
3. $-x^2/a^2-y^2/b^2+z^2/c^2=1$. Hiperboloid dvokrilni (sl. 51,a).

4. $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$. Hiperboloid jednokrilni (sl. 51,b).

5. $x^2/a^2+y^2/b^2=z$ Paraboloid eliptički (sl. 52,a).

6. $x^2/a^2-y^2/b^2=z$. Paraboloid hiperbolički (sl. 52, b).

7_1. $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=0$. Konus imaginarni. Početak koordinata.



Sl. 51a, b — Hiperboloid, dvo- i jednokrilni

7_2. $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$. Konus stvarni (sl. 53).)

8_1 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$. Cilindar eliptički (sl. 54,a).

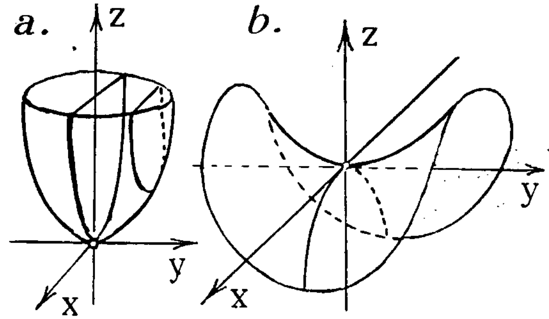
8_2. $x^2/a^2+y^2/b^2=-1$. „ „ imaginarni.

8_3. $x^2/a^2-y^2/b^2=1$. „ hiperbolički (sl. 54,b)

8_4. $x^2=2py$. „ parabolički (sl. 54,c).

8_5. $x^2/a^2+y^2/b^2=0$. Dve imaginarne ravni.

8_6. $x^2/a^2-y^2/b^2=0$. Dve ravni koje se seku (sl. 55, a)



Sl. 52a, b — Paraboloid, eliptički i hiperbolički

8_7. $x^2+a^2=0$. Dve imaginarne paralelne ravni.

8_8. $x^2-a^2=0$. Dve paralelne ravni (sl. 55,b).

8_9. $x^2=0$. Dve ravni koje se poklapaju.

Centar površine drugoga reda se određuje rešavanjem ovog sistema linearnih jednačina

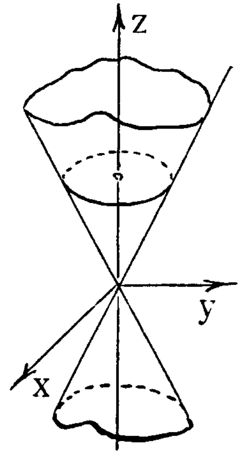
$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}=0,$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0,$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}=0.$$

Glavne ose se određuju posle rešavanja kubne karakteristične jednačine

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

koja se izražava pomoću invarijanata ovako

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0.$$

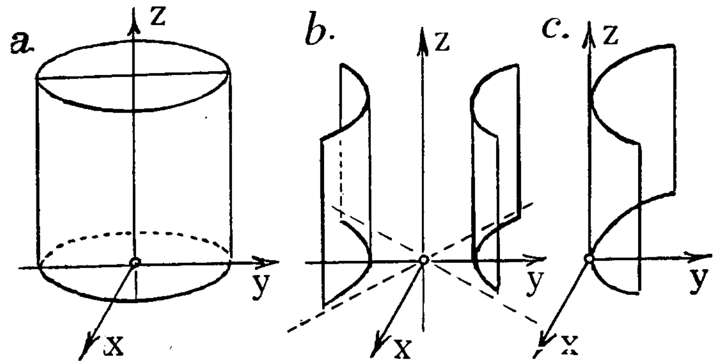


Sl. 53 — Konus

Jednačina površine tada dobiva oblik

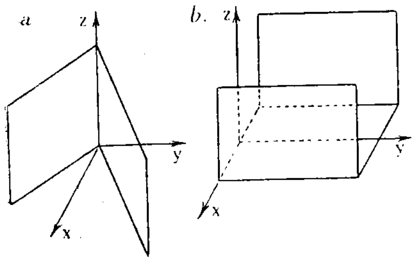
$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+a'_{44}=0,$$

gde su λ_1, λ_2, λ_3 koreni karakteristične jednačine, a $a'_{44}=I_4/I_3$.



Sl. 54 a, b, c — Cilindar, eliptički, hiperbolički i parabolički

Od centralnih površina sfera ima jednačinu



Sl. 55 — a. Dve ravni koje se seku; b. dve paralelne ravni

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+$$
$$+(z-z_c)^2=r^2$$

ili u opštem obliku x^2+ $+y^2+z^2+2a_{14}\,x+2a_{24}\,y+$ $+2a_{34}\,z+a_{44}=0$, gde su $x_c=-a_{14}$, $y_c=-a_{24}$, $z_c=$ $=-a_{34}$ koordinate centra i $r^2=a_{14}^2+a_{24}^2+a_{34}^2-a_{44}$ kvadrat poluprečnika. Sfera je realna, ako je a_{14}^2+ $+a_{24}^2+a_{34}^2-a_{44}>0$.

Za površine bez centra $(I_3=0)$ karakteristična jednačina $\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda=0$ ima korene $\lambda_{1,2}=\dfrac{1}{2}(I_1\pm\sqrt{I_1^2-4I_2})$, $\lambda_3=0$. Posle transformacije na nove ose jednačina površine dobiva oblik $\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+2a'_{34}\zeta=0$.

Ako iskoristimo četvrtu invarijantu ovog slučaja

$$I_4=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a'_{34}\\ 0 & 0 & a'_{34} & 0\end{vmatrix},$$

dobićemo

$$a'_{34}=\pm\sqrt{-\frac{I_4}{\lambda_1\lambda_2}},$$

pa na taj način imamo ovu kanoničnu jednačinu površine paraboličkog tipa

$$\frac{\lambda_1}{a'_{34}}\xi^2+\frac{\lambda_2}{a'_{34}}\eta^2=-2\zeta.$$

Pravolinijske generatrise površina drugoga reda. Prava, koja pripada jednoj površini i, menjajući svoj položaj, obrazuje tu površinu, zove se *pravolinijska generatrisa* te *površine.*

Od površina drugoga reda ove površine imaju pravolinijske generatrise: 1. jednokrilni hiperboloid, 2. hiperbolički paraboloid, 3. konusi i 4. cilindri.

1. Za jednokrilni hiperboloid $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$ imamo dva sistema pravolinijskih generatrisa. To su prave sa jednačinama

$$(1)\quad \alpha_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta_1\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \beta_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\alpha_1\left(1+\frac{y}{b}\right);$$

$$(2)\quad \alpha_2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta_2\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \beta_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\alpha_2\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

2. Za hiperbolički paraboloid $x^2/a^2-y^2/b^2=z$ imamo ove sisteme jednačina:

$$(3)\quad \gamma_1\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\delta_1,\quad \delta_1\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\gamma_1 z,$$

$$(4)\quad \gamma_2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\delta_2,\quad \delta_2\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\gamma_2 z.$$

3. Za konusne površine, npr. sa jednačinom 7_2, imamo ove parametarske jednačine generatrise: $x = ta \cos\theta$, $y = tb \sin\theta$, $z = tc$. Za datu vrednost parametra θ imamo jednačine prave — generatrise.

4. Za cilindarske površine sa jednačinom $F(x, y) = 0$ ova jednačina zajedno sa jednačinom $z = t$, gde je t proizvoljan parametar, izražava jednačinu generatrise za određene vrednosti x, y, koje zadovoljavaju jednačinu površine.

Glava treća

DIFERENCIJALNI RAČUN

3.1. Teorija graničnih vrednosti

Skup elemenata se zove *uređen*, prema postavljenom pravilu, ako se može odrediti za svaka dva elementa skupa, koji od njih prethodi drugom, a za svaki treći element, različit od prva dva, da li prethodi prvom, ili se nalazi između prvog i drugog, ili sledi drugom.

Ako se svi elementi, *članovi*, uređena skupa mogu numerisati, *skup* je *prebrojiv*. Takav skup se zove i *niz*, npr. *niz realnih brojeva, niz vrednosti date funkcije* i drugih objekata. Broj članova niza može biti konačan, to je *konačan niz*, i beskonačno veliki za *beskonačan niz*. Upotreba samo reči „*niz*" pretpostavlja beskonačan niz.

Oznake: (1) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ — niz brojeva, (2) $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ niz vrednosti date funkcije, tj. za $u = f(x)$ imamo $u_1 = f(x_1)$, $u_2 = f(x_2)$, $\ldots$, $u_n = f(x_n) = u(x_n)$. Članovi a_n i u_n su *opšti članovi* odgovarajućih nizova. Grafička slika: članovima a_i odgovaraju tačke na Ox osi, a članovima u_i tačke u ravni sa apscisama $x_1, x_2, x_n, \ldots$, i ordinatama $u_1, u_2, \ldots u_n$.

Ako za niz (1) postoji takav broj $M(m)$ da za sve članove niza važe nejednakosti $a_i < M$ $(a_i > m)$, niz je *ograničen odozgo* (*odozdo*). Slično se kaže i za niz (2), ako nejednakosti $u_i < M$ $(u_i > m)$ važe za sve vrednosti argumenta x u naznačenoj oblasti. Tada se kaže da je *funkcija* $u(x)$ *ograničena.*

I. *Broj a se zove granična vrednost niza (1), ako za svaku pozitivnu vrednost* ε *možemo naći takav član niza sa*

indeksom N da ako je $n \geqslant N$, onda postaje i ostaje na snazi nejednakost

$$\boxed{|a_n - a| < \varepsilon.}$$

II. *Za niz (1) se kaže da ima beskonačnu granicu* (∞), *ako za svaku pozitivnu vrednost P možemo naći takav član niza sa indeksom N, da pri $n \geqslant N$, postaje i ostaje*

$$\boxed{|a_n| > P}$$

Broj *a* iz prvog dela definicije granične vrednosti zove se *konačna* (ili prava) *granična vrednost*, a iz drugog *beskonačna* (ili neprava) *granična vrednost*.

Prema tome niz može: 1. imati konačnu graničnu vrednost i tada se zove *konvergentan niz* ; 2. imati beskonačnu graničnu vrednost i 3. nemati granice. U 2. i 3. slučaju niz se zove *divergentan*.

Takođe se kaže da a_n teži graničnoj vrednosti *a*, kad *n* teži beskonačnosti, i to se označuje na više načina: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $(a_n)_{n\to\infty} \to a$, $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$, pa i skraćeno $\lim a_n = a$, kad je uslov $n\to\infty$ poznat iz prethodnog izlaganja. Oznaka lim skraćena latinska reč *limes* — *granica*. U jednačini $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to -\infty$) simbol ∞ ne označava konkretan broj, već određuje proces ponašanja veličine a_n kad *n* raste posle određenog broja *N*.

Promenljiva veličina α se zove *beskrajno mala*, ako je njena granica jednaka nuli. Promenljiva veličina ω je *beskrajno velika*, ako je ona recipročna beskrajno maloj veličini. Veličine α i ω nisu vrlo mala i vrlo velika određena veličina, napr. 0,0000001 ili 100000000, već su promenljive veličine određenog ponašanja u procesu prelaza na granične vrednosti.

Ako je $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, onda je β beskonačno mala veličina višega reda prema α. Ako pri upoređivanju dve beskrajne male veličine α i β, beskrajno malu veličinu α uzmema za beskrajno malu veličinu prvoga reda i možemo postaviti uslov $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\beta}{\alpha^n} = A$, gde je $A \neq 0$ konstantna veličina, onda je β beskonačno mala veličina *n*-toga reda prema beskrajno maloj veličina α. Ako je $n = 1$, α i β su istoga reda, one su ekvivalentne. Ako je $\beta = \alpha + \varepsilon$, gde je ε beskonačno mala višega reda prema α, onda je α *glavni deo beskonačno male* β.

U nizu konkretnih problema o postavljanju funkcionalnih veza između raznovrsnih veličina u prirodi uspešno se primenjuje metoda operisanja sa beskrajno malim veličinama. Ova metoda se zove *infinitezimalni račun*, račun sa *infinitezimalama*, tj. sa beskrajno malim veličinama.

Pojam granice, koji smo definisali za niz (1) brojeva može da se proširi i na niz (2) vrednosti funkcije. On je od koristi pre svega za određivanje vrednosti funkcije $f(x)$ za neku vrednost $x = c$, ako se ne može neposredno odrediti vrednost $f(c)$.

Uzima se za promenljivu *x* tzv. *okolina tačke c*, tj. otvorena oblast $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, gde je ε proizvoljan pozitivan broj. U toj okolini postoji levi deo od $c-\varepsilon$ do *c* i desni od *c* do $c+\varepsilon$. Uzmimo levi deo okoline i na tom delu odredimo niz tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ i neka *c* bude granica tog niza, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Pretpostavljamo da se može odrediti za funkciju $f(x)$ niz vrednosti

$$f(x_1), f(x_2), \ \ldots\ , f(x_n), \ \ldots$$

U vezi sa tim nizom postavimo ovu *definiciju granične vrednosti funkcije*.

Ako postoji konačan broj *A* za koji se može naći takav broj *N* da za svako $n \geqslant N$ bude ispunjena nejednakost

$$|A - f(x_n)| < \varepsilon,$$

sa proizvoljno datim pozitivnim brojem ε, a pri tome x_n zadovoljava nejednakost

$$(*) \qquad 0 < c - x_n < \delta,$$

gde je δ pozitivan broj što odgovara broju ε, onda se kaže da je *A granična vrednost funkcije $f(x)$ sleva* od *c*.

Kratko se to beleži i ovako

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = A.$$

Ako u prethodnoj definiciji nejednakost (*) zamenimo nejednakošću.

(**) $$0 < x_n - c < \delta,$$

onda se, u opštem slučaju, definiše druga granična vrednost B, koja se zove *granična vrednost funkcije $f(x)$ zdesna* od c, i kratko označava

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = B.$$

Ako je $A = B$, obe nejednakosti (*) i (**) možemo izraziti

$$|x_n - c| < \delta,$$

a zajedničku graničnu vrednost obeležiti

$$\lim_{x_n \to c} f(x_n) = A.$$

To je *granična vrednost funkcije $f(x)$* u tački c, nezavisna od postupka prelaza na graničnu vrednost, sleva ili zdesna.

Stavovi o graničnim vrednostima:

1. $\lim A = A$ (A konstantan broj).

2. $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) + \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$. Vredi i za više sabiraka u konačnom broju.

3. $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) \times f_2(x)] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \times \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$. Ista primedba o proizvodu više množilaca.

4. $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) : f_2(x)] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) : \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$, ako je $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$.

5. Ako je $f_1(x) < f(x) < f_2(x)$ i $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A$, onda je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Definicije graničnih vrednosti, u koje već ulazi vrednost granice, ne mogu služiti za utvrđivanje egzistencije granične vrednosti. Kao teorema egzistencije može služiti ova *Bolcano —Košijeva teorema*:

Da promenljiva x_n ima konačnu granicu, neophodno je i dovoljno da za svaku vrednost $\varepsilon > 0$ postoji takav broj N, da ostaje na snazi nejednakost

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon,$$

ako su $n > N$ i $n' > N$. Ova teorema se zove i *Bolcano — Košijev princip konvergentnosti.* Ova teorema, kao i teoreme egzistencije u drugim oblastima matematike, ne daje postupak za konkretno određivanje same granične vrednosti. Takvo određivanje u svakom specijalnom slučaju zahteva naročito rasuđivanje.

Važni primeri.

1. $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{za } a > 1, \\ 1 & \text{za } a = 1, \\ 0 & \text{za } -1 < a < 1, \end{cases}$ ne konvergira za $a \leqslant -1$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1 (a > 0)$, 3. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, 4. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\log n}{n} = 0$, 6. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$,

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, 8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \, (a > 0)$,

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 10. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{z}{x}\right)^x = e^z$,

11. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C \approx 0{,}57722\ldots$ (*Ajlerova konstanta*).

12. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$ (*Valisov proizvod*).

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$ 14. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,$

15. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^{\varepsilon x}}=0\ (\varepsilon>0),$ 16. $\lim_{x\to\infty}\frac{ln^k x}{x^\varepsilon}=0\ (\varepsilon>0).$

17. $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1.$ 18. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{p}=1\ (p>0).$

19. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\frac{1}{e}.$ 20. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-p)!\,n^p}=1$ ($p>0$, ceo broj).

21. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k;$ 22. $\lim_{n\to\infty} n^k x^n=0\ (|x|<1).$

23. $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\begin{cases}0, & \text{ako } 0<a<1,\\ 0{,}5 & \text{ako } a=1,\\ 1, & \text{ako } a>1.\end{cases}$$

24. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}\ (a>0,\ b>0).$

25. $$\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\cdots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\cdots(x^k-1)}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}=\binom{n}{k}.$$

26. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$ (k — ceo pozit. br.).

27. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right]=\frac{1}{2}$ (k — ceo pozitivan broj).

28. $\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}=-1.$

29. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$

30. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}=\frac{4}{3}.$

31. $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)}{n^3}=\frac{1}{3}.$

32. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]=a^2+a+\frac{1}{3}.$$

33. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}$ (Stirlingova formula).

Ako je $f(x)$ konačna funkcija za svako konačno x, onda

34. $\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right].$

35. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x+1)}{f(x)}\right]=\lim_{x\to\infty}[f(x)^{\frac{1}{x}}].$

3.2. Neprekidnost funkcije

Pretpostavimo da je ograničena funkcija $f(x)$ određena u zatvorenom području $[a, b]$ i broj c se nalazi između a i b, tj. $a<c<b$.

Definicija neprekidnosti funkcije u tački c. Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački c, ako ona ima granične vrednosti sleva i zdesna od c i te granične vrednosti jednake su vrednosti funkcije za c, tj.

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=f(c)=\lim_{x\to c+0} f(x).$$

Ako je funkcija $y=f(x)$ neprekidna za $x=c$ i priraštaj argumenta $\Delta x=x-c$ uzimamo kao beskrajno malu veličinu, onda je i priraštaj funkcije $\Delta y=f(c+\Delta x)-f(c)$ beskrajno mala.

Za funkciju $f(x)$, koja u tački c ne zadovoljava uslove neprekidnosti, kaže se da u toj tački ima *prekid* ili *skok*.

Za krajeve zatvorenog područja, tačke a i b, može se govoriti samo o *desnoj* i *levoj neprekidnosti.*

Definicija neprekidnosti funkcije na datom području. Funkcija $f(x)$, ograničena i određena u svima tačkama određenog zatvorenog područja, *neprekidna* je *na* tom *području,* ako je neprekidna u svakoj njegovoj tački, a i na krajevima u smislu jednostrane neprekidnosti.

Nabrojimo neke važne neprekidne funkcije.

1. Polinom po x i količnik dva polinoma su neprekidne funkcije, sem za one vrednosti x-a (polovi količnika), za koje polinom u imeniocu ima vrednost nule.

2. Sve tzv. elementarne funkcije (stepen, eksponencijalne, logaritam, trigonometrijske i inverzne trigonometrijske, hiperboličke) su neprekidne funkcije za sve vrednosti x-a, sem za one konačne vrednosti x-a za koje funkcija teži beskonačnosti.

3. Zbir i proizvod konačnog broja neprekidnih funkcija takođe je neprekidna funkcija. Isto to se odnosi i na količnik dve funkcije, sem za one vrednosti x-a za koje imenilac ima vrednost nule.

Za funkcije koje su neprekidne u određenom intervalu $[a, b]$ možemo navesti ove osobine:

1. U intervalu uvek postoji bar jedna tačka za koju funkcija uzima svoju najveću vrednost; i bar jedna tačka sa najmanjom vrednošću funkcije.

2. Ako su A i B vrednosti funkcije za a i b, tj.

$$A = \lim_{x=a+0} f(x), \quad B = \lim_{x\to b-0} f(x),$$

i ako je S neki proizvoljan broj između A i B, onda postoji bar jedan broj s, između a i b, za koji $f(s) = S$. Zaključak: ako su A i B raznih znakova, postoji vrednost s za koju $f(s) = 0$, tj. postoji koren jednačine $f(x) = 0$.

3. Ako na datom intervalu razlika $x'' - x'$ dve vrednosti argumenta teži nuli, onda i razlika $f(x'') - f(x')$ dve odgovarajuće vrednosti funkcije takođe teži nuli.

U vezi sa tom osobinom definišimo pojam *ravnomerne neprekidnosti* date funkcije u datom intervalu $[a, b]$. Osobina neprekidne funkcije pod 3. može se izraziti uslovima:

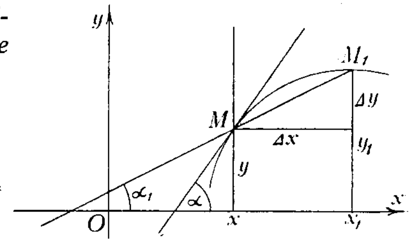
$$f(x'') - f(x') < \varepsilon, \qquad |x'' - x'| < \delta,$$

gde su: ε dati broj (recimo, poželjna tačnost tablice vrednosti funkcije $f(x)$), a δ traženi broj, koji zavisi od ε i položaja tačaka x' i x'' (u tablici — gustina argumenta x). Ako za neprekidnu funkciju $f(x)$, veličina δ zavisi samo od ε, funkcija $f(x)$ je *ravnomerno neprekidna* u datoj oblasti. Za zatvorenu oblast $[a, b]$ važi *Kantorova teorema:* ako je određena funkcija $f(x)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti $[a, b]$, ona je ravnomerno neprekidna u toj oblasti.

3.3. Izvod i diferencijal funkcije

Uzmimo funkciju (I) $y = f(x)$ i njen grafik (sl. 56) sa označenim veličinama: Δx je priraštaj nezavisno promenljive x, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ — priraštaj funkcije, α_1 — ugao sekante MM_1 sa osom x, α — ugao između tangente i ose x.

Definicija izvoda — Izvod ili izvodna funkcija date funkcije je granična vrednost, ako ona postoji, odnosa priraštaja funkcije prema priraštaju nezavisno promenljive kad priraštaj nezavisno promenljive teži nuli.



Sl. 56 — Sekanta i tangenta krive

Primer određivanja.

$$y = f(x) = x^2.$$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x, \text{ tj. } (x^2)' = 2x.$$

Opšti obrazac.

$$\text{(II)} \quad y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1\to x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = \operatorname{tg}\alpha,$$

pri čemu je vrednošću tg α naznačeno geometrijsko tumačenje izvoda, kao tangensa ugla tangente sa x—osom.

Izvod konstante, zbira i razlike.

(III) $(c)'=0$. Rečima: *izvod konstante je nula.*

(IV) $(u \pm v)' = u' \pm v'$. Rečima: *izvod zbira ili razlike jednak je zbiru ili razlici izvoda.*

Složena funkcija i njen izvod.

(V_1) $y=f(u), u=\varphi(x)$ ili $y=f(u),\ u=\varphi(v),\ v=\psi(x)$.

Definicija. Funkcija za čije izračunavanje treba izvršiti niz uzastopnih operacija zove se *složena funkcija.*

(V_2) $y'=y_u'\cdot u'$ ili $y'=y_u'\cdot u_v'\cdot v'$. Rečima: *izvod složene funkcije jednak je izvodu složene funkcije po složenom argumetu puta izvod tog složenog argumenta po nezavisno promenljivoj.* To je *pravilo nadovezivanja.*

Izvod inverzne funkcije. Ako je $y=f(x)$ data funkcija, ista funkcionalna veza izražena u obliku $x=\varphi(y)$ daje inverznu funkciju. Između izvoda y'_x i x'_y postoji veza

(VI) $$x'_y = \frac{1}{y'_x},$$

rečima: *izvod inverzne funkcije jednak je recipročnoj vrednosti izvoda date funkcije.*

Izvod logaritamske i eksponencijalne funkcije.

(VII_1) $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\lg a}$. (VII) $(\lg x)' = \frac{1}{x}$.

(VII_2) $$(\log_{10} x)' = \frac{1}{x}\log_{10} e = \frac{M}{x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\lg_{10}},$$

gde su upotrebljene oznake: $\log_a$—logaritam sa osnovom a, lg—logaritam sa osnovom e ili prirodni logaritam sa oznakom ln, $\log_{10}$— dekadni logaritam, i M dekadni modul prirodnih logaritama, $M=\log_{10} e \approx 0{,}43429448$, $1:M=$

$$=\log_e 10 \approx 2{,}30258509.$$

(VIII) $(e^x)'=e^x$, ($VIII_1$) $(a^x)'=a^x\frac{1}{\log_a e}=a^x \lg a$.

($VIII_2$) $$(10^x)'=10^x\frac{1}{M}=10^x \lg 10.$$

Izvod proizvoda i količnika.

(IX) $(uv)'=u'\,v+u\,v'$, rečima: *izvod proizvoda dvaju činioca jednak je zbiru proizvoda izvoda svakog činioca pomnoženog drugim činiocem.*

Ako uvedemo pojam *logaritamskog izvoda* kao količnika izvoda i same funkcije za proizvod više činilaca $y=u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$ posle logaritmovanja i diferenciranja imamo:

(IX_1) $$\frac{y'}{y}=\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+\frac{u_3'}{u_3}+\cdots+\frac{u_n'}{u_n}$$

i rečima: *logaritamski izvod proizvoda jednak je zbiru logaritamskih izvoda svih činilaca.* I najzad:

(IX_2) $$(u_1 u_2 \ldots u_n)' = u'_1 u_2 \ldots u_n + u_1 u'_2 \ldots u_n + \cdots + u_1 u_2 \ldots u'_n.$$

Rečima: *izvod proizvoda više činilaca jednak je zbiru proizvoda izvoda svakog činioca pomnoženog proizvodom svih ostalih činilaca.*

Za količnik u/v imamo

(X) $$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\,v-v'\,u}{v^2}.$$

Rečima: *Izvod količnika jednak je izvodu brojioca puta imenilac manje izvod imenioca puta brojilac, sve to podeljeno kvadratom imenioca.*

Za proizvod konstante i funkcije:

(XI) $$(Cu)'=Cu'$$

Izvod stepena.

(XII) $$(x^m)'=m\,x^{m-1},$$

rečima: *Izvod stepena jednak je proizvodu izložioca i stepena sa izložiocem umanjenim za jedinicu.*

(XII_1) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \cdot$ (XII_2) $\left(\sqrt[p]{x^q}\right)' = \left(x^{\frac{q}{p}}\right)' = \frac{q}{p}\sqrt[p]{x^{q-p}}.$

(XII_3) $$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Izvodi trigonometrijskih funkcija.

(XIII) $(\sin x)' = \cos x$. *Izvod sinusa jednak je kosinusu.*

$(XIII_1)$ $(\cos x)' = -\sin x$. *Izvod kosinusa jednak je minus sinus.*

(XIV) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, (XIV_1) $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

$(XIV_{2,3})$ $(\sec x)' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$, $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$.

Izvodi inverznih trigonometrijskih funkcija.

(XV) $(\arcsin x)' = 1 : \sqrt{1-x^2}$,

(XV_1) $(\arccos x)' = -1 : \sqrt{1-x^2}$;

(XVI) $(\operatorname{arc\,tg} x)' = 1 : (1+x^2)$,

(XVI_1) $(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -1 : (1+x^2)$.

Izvod stepena promenljive osnove i izložioca.

Za određivanje izvoda funkcije $y = u^v$, gde su u i v funkcije x-a najjednostavnije je računati logaritamski izvod, tj. posle logaritmovanja po prirodnoj osnovi $\lg y = v \lg u$ odrediti logaritamski izvod: $\frac{y'}{y} = v' \lg u + v\frac{u'}{u}$, odakle imamo

(XVII) $$(u^v)' = u^v\left(v' \lg u + v\frac{u'}{u}\right).$$

Ovaj obrazac nije potrebno pamtiti, već se treba setiti da funkciju treba logaritmovati.

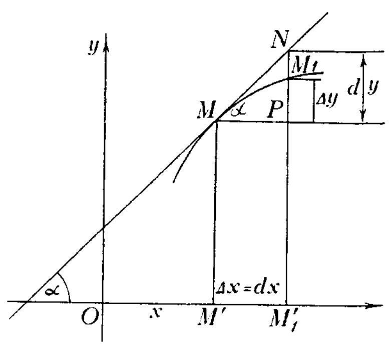
Primer. $y = x^x$; $\lg y = x \lg x$; $\frac{y'}{y} = \lg x + 1$; $y' = (x^x)' = x^x(\lg x + 1)$.

Pojam diferencijala. — Diferencijal, sa oznakom dx, nezavisno promenljive x je priraštaj ove promenljive, tj. $dx = \Delta x$.

Diferencijal, sa oznakom dy, funkcije $y = f(x)$ *je proizvod izvoda funkcije y' i diferencijala nezavisno promenljive, tj.*

(XVIII) $$dy = y'\,dx.$$

Iz geometrijskog tumačenja izvoda (sl. 57) sleduje da je *diferencijal funkcije priraštaj ordinate tačke na tangenti.*



Sl. 57 — Diferencijali argumenta i funkcije

Iz (XVIII) sleduje

$(XVIII_1)$ $$y' = \frac{dy}{dx},$$

izvod je količnik diferencijala funkcije i diferencijala nezavisno promenljive.

Pošto je $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon = dy + \varepsilon$, gde ε beskrajno mala višega reda prema Δx, dy je glavni deo beskrajno malog priraštaja funkcije.

Pošto je za određivanje diferencijala funkcije potrebno samo pomnožiti izvod diferencijalom nezavisno promenljive, operacije za određivanje izvoda i određivanje diferencijala funkcije, a ova poslednja se zove *diferenciranje*, ekvivalentne su. Često se reč „*diferencirati*" upotrebljuje u smislu određivanja izvoda. Račun, čiju osnovu sačinjavaju operacije sa izvodima i diferencijalima, zove se *diferencijalni račun.*

Kaže se da je *funkcija diferencijabilna u* određenoj *tački*, ako ona ima diferencijal (odn. izvod) u toj tački. Funkcija, koja ima diferencijal u svim tačkama intervala $[a, b]$, *diferencijabilna je na* tom *intervalu.* Na krajevima ona može imati samo desni i levi izvod odnosno diferencijal. Diferencijabilna funkcija je neprekidna, ali nije svaka neprekidna funkcija diferencijabilna. Neprekidna funkcija koja nije diferencijabilna u određenoj tački može imati u toj tački levi i desni izvod, različite vrednosti. Takva tačka je *prelomna* tačka.

Izvodi i diferencijali višega reda. Od izvoda $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \varphi(x) = \varphi$ date funkcije $y = f(x)$ može se, pod opštim uslovima za diferenciranje, obrazovati nov izvod

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \psi(x) = \psi.$$

Tada se kaže da je za funkciju $y = f(x)$ izvod $y' = \varphi$ *prvi izvod*, ili *izvod prvoga reda*, a izvod $\varphi' = \psi(x) = \psi$ — *izvod drugoga reda* funkcije $y = f(x)$. On se beleži sa y'' (čitaj: ipsilon drugi ili sekundum). Za drugi diferencijal funkcije y imamo

$$d^2y = d(dy) = d(y'\,dx) = d(y')dx = y''\,dx\,dx = y''\,dx^2.$$

Odakle je $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$. Slično, imamo $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$, gde je d^3y diferencijal trećega reda funkcije y. Uopšte se može govoriti o n-tom izvodu, kao prvom izvodu od $(n-1)$-og izvoda, i o n-tom diferencijalu sa očevidnim oznakama

$$\text{(XIX)} \qquad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Osnovni postupak za određivanje izvoda odnosno diferencijala funkcije višega reda sastoji se u uzastopnom diferenciranju. Taj postupak može, u nekim specijalnim slučajevima, biti znatno skraćen. Npr. za $y = e^x$ neposredno imamo $(e^x)^{(n)} = e^x$; za $y = \sin x$ prema obrascu $(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ imamo $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ i slično

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Za $y = x^m$ imamo $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]\,x^{m-n}$. Ako je m ceo i pozitivan broj, m-ti izvod ima stalnu vrednost $(x^m)^{(m)} = m!$, a ostali izvodi su jednaki nuli. Ako broj m nije ceo i pozitivan, nijedan izvod nema konstantnu vrednost; tada je niz izvoda beskonačan.

Diferenciranje funkcija određenih u parametarskom obliku. Ako jednačine $x = x(t)$, $y = y(t)$ određuju y kao funkciju x-a, izvod $y' = \frac{dy}{dx}$ ima vrednost $\frac{dy}{dx} = (dy/dt):(dx/dt) = \dot{y}/\dot{x}$, gde gornja tačka označava izvod po parametru. Kratko:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x}{dx^3},$$

gde su dx, dy, d^2x, d^2y diferencijali funkcija x i y po parametru t.

Tablica za diferenciranje

(I) $y = f(x)$

(II) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x_1 \to x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = \operatorname{tg}\alpha.$

(III) $(c)' = 0.$ (IV) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(V) $y = f(u), u = \varphi(x);\ y' = y'_u \cdot u'.$ (VI) $x'_y = 1 : y'_x$

(VII) $(\lg x)' = 1 : x$, (VII_1) $(\log_a x)' = 1 : (x \lg a) = \frac{1}{x}\log_a e;$

(VII_2) $(\log_{10} x)' = \frac{1}{x}.\ \log_{10} e = \frac{M}{x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\lg 10}.$

(VIII) $(e^x)' = e^x$, (VIII_1) $(a^x)' = a^x\,\frac{1}{\log_a e} = a^x \lg a,$

(VIII_2) $(10^x)' = 10^x\,\frac{1}{M} = 10^x \lg 10.$

(IX) $(uv)' = u'v + uv'$, (IX_1) $(u_1u_2\ldots u_n)' = u_1'u_2\ldots u_n + u_1u_2'\ldots u_n + \ldots + u_1u_2\ldots u_n',$

(IX$_2$) $\frac{(u_1u_2\ldots u_n)'}{u_1u_2\ldots u_n}=\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+\ldots+\frac{u_n'}{u_n}$,

(X) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, (XI) $(Cu)'=Cu'$,

(XII) $(x^m)'=mx^{m-1}$, (XIII) $(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

(XIII$_1$) $(\cos x)'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

(XIV) $(\operatorname{tg} x)'=1:\cos^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x$, (XIV$_1$) $(\operatorname{cotg} x)'=$ $=-1:\sin^2 x=-(1+\operatorname{cotg}^2 x)$. (XV) $(\arcsin x)'=1:\sqrt{1-x^2}$,

(XV$_1$) $(\arccos x)'=-1:\sqrt{1-x^2}$,

(XVI) $(\operatorname{arc\,tg} x)'=1:(1+x^2)$, (XVI$_1$) $(\operatorname{arc\,cotg} x)'=$ $=-1:(1+x^2)$.

(XVII) $y=u^v$ logaritmovati. (XVIII) $dy=y'\,dx$, $y'=\frac{dy}{dx}$.

(XIX) $y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}$. (XX) $x=x(t)$, $y=y(t)$.

$\frac{dy}{dx}=(dy/dt):(dx/dt)=\dot{y}/\dot{x}$.

Neki dopunski rezultati diferenciranja

(1) $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}$, (2) $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$, (3) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

(4) $(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$. (5) $(\sec x)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x\sec x$,

(6) $(\operatorname{cosec} x)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\operatorname{cotg} x\operatorname{cosec} x$,

(7) $\left[\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]'=\frac{1}{\cos x}=\sec x$,

(8) $\left(\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x$, (9) $(\lg\sin x)'=\operatorname{cotg} x$,

(10) $(\lg\cos x)'=-\operatorname{tg} x$, (11) $\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

(12) $\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)'=\frac{a}{a^2+x^2}$, (13) $(\operatorname{arc\,sec} x)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$,

(14) $(\operatorname{arc\,cosec} x)'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(15) $[\lg(x+\sqrt{x^2\pm a^2}]'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$,

(16) $\left[\frac{1}{2a}\lg\frac{x-a}{x+a}\right]'=\frac{1}{x^2-a^2}$, (17) $\left[\frac{1}{2a}\lg\frac{a+x}{a-x}\right]'=\frac{1}{a^2-x^2}$.

(18) $(\sinh x)'=\cosh x$, (19) $(\cosh x)'=\sinh x$,

(20) $(\operatorname{tgh} x)'=\frac{1}{\cosh^2 x}$, (21) $(\operatorname{cotgh} x)'=-\frac{1}{\sinh^2 x}$,

(22) $(\operatorname{Ar}\sinh x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

(23) $(\operatorname{Ar}\cosh x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

(24) $\left(\operatorname{Ar}\sinh\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$,

(25) $\left(\operatorname{Ar}\cosh\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$,

(26) $(\operatorname{Ar\,tgh} x)'=\frac{1}{1-x^2}$, $(-1<x<+1)$.

(27) $(\operatorname{Ar\,cotgh} x)'=\frac{1}{1-x^2}$, $\left(-1<\frac{1}{x}<+1\right)$.

$$(28)\quad (e^{ax})^{(n)} = a^n \cdot e^{ax}, \qquad (28_1)\quad (a^{kx})^{(n)} = (k \lg a)^n a^{kx}.$$

$$(29)\quad (\lg x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},$$

$$(29_1)\quad (\log_a x)^n = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n (\lg a)^n}.$$

$$(30)\quad (\sin x)^n = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(31)\quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(32)\quad (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(33)\quad (\cos kx)^n = k^n \cos\left(kx + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(34)\quad (x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)\,x^{m-n}.$$

$$(35)\quad \left(\frac{1}{x^m}\right)^{(n)} = (-1)^n m(m+1)(m+2)\cdots$$

$$\cdots(m+n-1)\frac{1}{x^{m+n}}.$$

$$(36)\quad (\sqrt[m]{x})^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{1}{m^n}(m-1)(2m-1)\cdots$$

$$[(n-1)m-1]\frac{1}{\sqrt[m]{x^{mn-1}}}.$$

$$(37)\quad (uv)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \cdots$$

$$+ uv^{(n)}$$ (Lajbnicov obrazac).

$$(38)\quad (u^v)' = u^v\left(v' \lg u + v\frac{u'}{u}\right).$$

$$(39)\quad d(u+v-w) = du + dv - dw, \qquad (39_1)\quad d(uv) = v\,du + u\,dv,$$

$$(39_2)\quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

3.31. Funkcije više promenljivih

U svakoj funkciji od dve ili više promenljivih svim nezavisno promenljivim, *sem jedne*, možemo dati stalne vrednosti. Pod takvim uslovom funkcija više promenljivih postaje funkcijom samo jedne nezavisno promenljive i prema tome možemo postaviti definiciju: izvod funkcije više promenljivih po jednoj promenljivoj, kad pretpostavljamo da su sve ostale promenljive konstantne, zove se *delimični* ili *parcijalni izvod* po toj promenljivoj. Za funkciju $z = f(x, y)$ imamo dva delimična izvoda sa oznakama:

$$z_x' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = D_x f(x, y),$$

$$z_y' = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y'(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y f(x, y).$$

Proizvodi $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ i $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ su *delimični* ili *parcijalni diferencijali*.

Zbir svih delimičnih diferencijala je totalni diferencijal. Oznaka:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Za funkciju $u = f(x, y, z)$ imamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{i} \quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

U slučaju funkcije n promenljivih $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ imamo n delimičnih izvoda i diferencijala i totalni diferencijal $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}dx_i$.

Delimični izvodi prvoga reda, recimo, funkcije

$$z = f(x, y), \text{ tj. } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ i } \frac{\partial z}{\partial y},$$

u opštem slučaju, sa svoje strane, su funkcije x i y i prema tome imamo četiri druga delimična izvoda:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Izvodi $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ se razlikuju samo po redu diferenciranja. Ako se zaustavimo samo na funkcijama kod kojih rezultat diferenciranja ne zavisi od reda diferenciranja, drugih delimičnih izvoda biće samo tri: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Zbir svih delimičnih diferencijala, od kojih su dva jednaka, daje ovaj drugi totalni diferencijal funkcije z:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Navedimo za funkciju $z = f(x, y)$ gornje obrasce sa tzv. *Monževim oznakama*:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad dz = p dx + q dy; \quad r = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y},$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial\, y^2}, \quad d^2 z = r\, dx^2 + 2s\, dx\, dy + t\, dy^2.$$

Funkcija $z = f(x, y)$ je diferencijabilna u datoj tački $M(a, b)$ ako je $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A \Delta x + B \Delta y + \varepsilon \rho$, gde su A i B konstante, naime

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=a \\ y=b}}, \quad B = \left(\frac{\partial f}{\partial\, y}\right)_{\substack{x=a \\ y=b}}, \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \text{ i } \varepsilon \to 0,$$

kad $\rho \to 0$. Prema tome i za funkciju više promenljivih možemo kazatida je tota lni diferencijal glavni deo priraštaja.

Iz navedenog je jasan i ovaj simbolički obrazac za diferencijal n-toga reda za funkciju, recimo, od tri nezavisno promenljive

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)^n f.$$

Diferenciranje složenih funkcija. Ako je $z = f(x, y)$, a $y = \varphi(x)$, imamo iz obrasca $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ ovaj obrazac:

$$\frac{dz}{\partial x} = \frac{\partial f}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'(x).$$

Kratko se kaže: prvi član $\frac{\partial f}{\partial x}$ je rezultat diferenciranja po x, ukoliko x ulazi neposredno, a drugi član $\frac{\partial f}{\partial y} y'$, ukoliko x ulazi preko y-a.

Ako je $\Phi = \Phi(x, y, z)$, imamo $\frac{d\Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z'$, gde su y' i z' izvodi y i z po x.

Na sličan način se određuju delimični izvodi, kad su x, y, z funkcije nezavisno promenljivih u i v. Posle diferenciranja po u i po v imamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Pri diferenciranju složenih funkcija diferenciranje se sastoji iz dve faze: iz diferenciranja po promenljivoj koja ulazi neposredno $\left(\text{npr. } \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ i iz složenog diferenciranja preko složenog argumenta $\left(\text{npr. } \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

Po istom pravilu se određuju i totalni diferencijali složenih funkcija više promenljivih. Ako je $w = f(x, y, z; u, v)$, gde su $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, tada je

$$dw = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy +$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

Diferenciranje implicitnih funkcija. Funkcija $y(x)$ određena jednačinom $F(x, y) = 0$. Iz (*) $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$ imamo $\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$. Za određivanje y'' diferencirajmo (*) još jedanput $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y}y'' = 0$, odakle je $y'' = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2\right) : \frac{\partial F}{\partial y}$, pri čemu u taj izraz možemo staviti određenu vrednost y' iz (*).

Ako je funkcija $z = z(x, y)$ određena jednačinom

$$F(x, y, z) = 0,$$

iz jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

određujemo dva izvoda: $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$. Drugi delimični izvodi se određuju ponovnim diferenciranjem prve jednačine prvo po x, a zatim po y, a druge jednačine prvo po x (radi proveravanja), a zatim po y. Za jednačinu sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ imamo:

$$1.\ x + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad 2.\ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

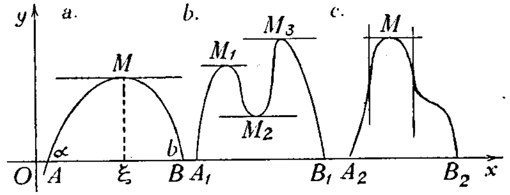
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Konačno imamo ovaj rezultat sa *Monževim oznakama*:

$$p = -x/z,\ q = -y/z;\ r = -(R^2 - y^2) : z^3,\ s = -xy : z^3,$$
$$t = -(R^2 - x^2) : z^3.$$

3.4. Osnovne teoreme diferencijalnog računa

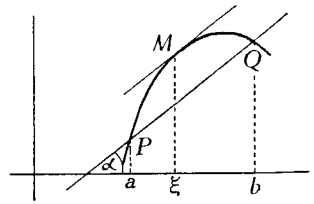
Rolova teorema. Ako jednoznačna konačna neprekidna funkcija jedne promenljive ima na granicama određenog intervala vrednosti jednake nuli (ili bilo kakve druge, ali jednake vrednosti) i u unutrašnjosti tog intervala ima određeni izvod bilo konačan, bilo beskonačan u prevojnim tačkama, tada izvod te funkcije bar jedanput u tom intervalu ima vrednost nula (sl. 58).



Sl. 58 — Rolova teorema

Lagranževa teorema. Iz Rolove teoreme sleduje: ako je kriva data jednačinom $y = f(x)$ i $f(a) = 0$ (ili A), $f(b) = 0$ (ili A), onda postoji tačka čija je apscisa ξ (ksi) između a i b, tako da je $f'(\xi) = 0$. Za slučaj kad sečica PQ (sl. 59) nije paralelna sa Ox osom, a između a i b postoji tačka $M(\xi)$ sa tangentom paralelnom sečici PQ imamo *Lagranževu teoremu*, čiji sadržaj izražavamo analitički obrascem

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) = \operatorname{tg}\alpha.$$



Sl. 59 — Lagranževa teorema

pri čemu funkcija $f(x)$ treba da zadovoljava uslove analogne uslovima navedenim u Rolovoj teoremi. Iz prethodne jednačine sleduje obrazac

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(\xi),$$

koji se može napisati

$$(*)\qquad f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h),$$

gde je θ (teta) broj, koji zadovoljava uslove $0<\theta<1$ i prema tome je pravi razlomak. To je *Lagranžev obrazac.* Iz tačnog Lagranževog obrasca mogu napisati približne obrasce za neku vrednost θ_1, koju biramo unapred, ne znajući pravu vrednost θ. Tada je $f(x+h)-f(x)\approx hf(x+\theta_1 h)$; za $\theta_1=0$ i $\theta_1=1$ sa izvodima za krajnje vrednosti intervala imamo važne približne obrasce: $f(x+h)-f(x)\approx hf'(x)$ i $f(x+h)-f(x)\approx hf'(x+h)$.

Lagranževa teorema izražena obrascem (*) zove se i *teorema o srednjoj vrednosti funkcije.*

Navedimo još važan *Košijev obrazac*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

uopštenje Lagranževog obrasca. Sem uslova koji važe za funkciju u Lagranževoj teoremi. $\varphi'(\xi)\neq 0$ je dopunski uslov. Druga forma Košijevog obrasca

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}=\frac{f'(x+\theta h)}{\varphi'(x+\theta h)},\ \text{sa}\ 0<\theta<1.$$

Ako su $f(x)=\varphi(x)=0,\ f'(x)=\varphi'(x)=0,\dots,f^{(n-1)}(x)=$ $=\varphi^{(n-1)}(x)=0$, a $\varphi^{(n)}(x)\neq 0$, važi generalisani Košijev obrazac

$$\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)}=\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{\varphi^{(n)}(x+\theta h)}.$$

Tejlorov obrazac. Uzastopna primena teoreme o srednjoj vrednosti dovodi do ovog obrasca

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\dots+$$

$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n,$$

gde su: h—priraštaj argumenta, $i!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot i$, tj. faktorijela, $f^{(i)}(x)$—i-ti izvod funkcije $f(x)$ i R_n tzv. *ostatak* sa vrednošću

$$R_n=\frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x+\theta h)\ \text{sa}\ 0<\theta<1.$$

Meklorenov obrazac. Ako u Tejlorov obrazac stavimo $x=0$, a zatim h označimo sa x, dobićemo tzv. Meklorenov obrazac

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\dots+$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n,\ \text{gde je}$$

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),\ \text{sa}\ 0<\theta<1.$$

Tejlorov i Meklorenov obrasci su *tačni obrasci*, ako stavimo odgovarajuću vrednost broja θ. Pošto ne postoji opšti algoritam (pravilo izračunavanja) za određivanje takvog broja θ, navedeni obrasci se upotrebljavaju u približnoj formi. Proučavanje njih u toj formi spada u Teoriju redova.

Diferencijalne forme prethodnih obrazaca

$$\Delta y=\Delta x\cdot f'(x)+\frac{1}{2!}(\Delta x)^2 f''(x)+\dots+R_n,$$

$$\Delta y=dy+\frac{1}{2!}d^2y+\dots+R_n.$$

Izvedena teorija Tejlorovog i Meklorenovog obrazaca se proširuje i na slučaj funkcije više promenljivih. Za dve promenljive imamo:

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+$$

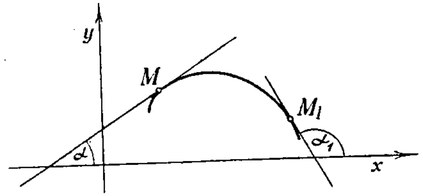
$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+R_3.$$

3.5. Analitičke primene izvoda i diferencijala

Pomoću pojmova granične vrednosti, izvoda i diferencijala može se proučavati ponašanje funkcije jedne ili više promenljivih oko date tačke, u datoj okolini.

Definisani pojam neprekidnosti funkcije jedne promenljive u datoj tački odnosno na jednom području, sa dopunom pojma ravnomerne ili uniformne neprekidnosti, lako se proširuje i na slučaj funkcije više promenljivih. Osnovnu ulogu igra tzv. ε—δ *princip*.

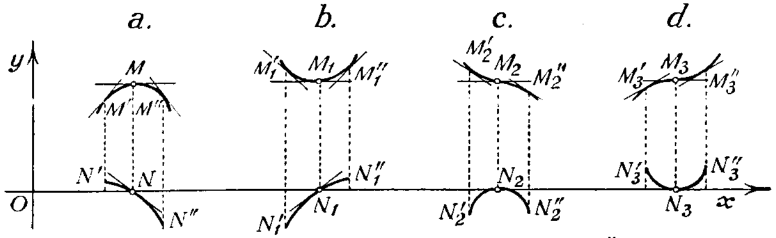
Rašćenje i opadanje funkcije. Ako neprekidna *funkcija* $y=f(x)$ za određenu vrednost argumenta x *raste*, tj. za $\Delta x>0$ i $\Delta y>0$, i za $\Delta x<0$ i $\Delta y<0$, imamo $y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$. Prema tome, ako funkcija *raste*, prvi izvod je pozitivan, ako *opada*, izvod je negativan. U prvom slučaju tangenta na krivu čini oštar ugao sa Ox osom, u drugom — tup (sl. 60). Za funkciju koja u datom intervalu $[a, b]$ ili ne opada, već bilo raste bilo ostaje nepromnjena, ili ne raste, već bilo opada bilo ostaje nepromenjena, kaže se da je, u tom intervalu, *monotona u širem smislu*. Ako samo bilo raste bilo samo opada, *funkcija je monotona u užem smislu;* to su *uzlazne* ili *silazne funkcije*.



Sl. 60 — Rašćenje i opadanje funkcije

3.51. *Ekstremum funkcije*

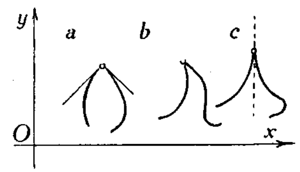
Glavni deo teorije najvećih i najmanjih vrednosti funkcije se odnosi na onaj slučaj, kad je data funkcija neprekidna i diferencijabilna u određenoj oblasti. Kad je u tački M krive sa određenom tangentom, paralelnom Ox osi (sl. 61a, b), vrednost funkcije u toj tački u (M) veća (odnosno manja u



Sl. 61 — Maksimum, minimum i prevojna tačka

tački M_1) od vrednosti te funkcije $y(M')$ i $y(M'')$ u tačkama levo i desno od tačke M, tj. $y(M)>y(M')$ i $y(M)>y(M'')$ [odnosno $y(M_1)<y(M'_1)$ i $y(M_1)<y(M''_1)$], onda se kaže da u tački M funkcija ima *maksimum (maximum*, kratko, *max.*) odnosno *minimum (minimum*, kratko, *min.)*. Kao zajednički naziv za pojmove maksimuma i minimuma uvedena je reč *ekstremum (extremum)* funkcije.

Pojam, recimo, maksimuma, je uži od pojma najveće vrednosti, jer funkcija može u datoj tački krive imati najveću vrednost, npr. za slučajeve nacrtane na slici (sl. 62), kad funkcija ima najveću vrednost, ali nema određenog izvcda ili je taj izvod beskonačan. Takve najveće vrednosti nemaju naziv maksimuma odnosno minimuma.



Sl. 62 — Tačke bez relativnog maksimuma

Svaka tačka na krivoj u kojoj je tangenta paralelna sa Ox osom, tj. $y'=0$, zove se *stacionarna tačka*, a vrednost funkcije za tu tačku — *stacionarna vrednost*.

Uslov stacionarnosti tačke $y'(x)=0$ je neophodan za ekstremum, ali nije dovoljan, jer postoji slučaj da je, npr. u tački M_2' (sl. 61 c, d) levo od stacionarne tačke M_2 $y(M'_2)>y(M_2)$, a u tački M_2'' desno od M_2 $y(M_2'')<y(M_2)$. Takva tačka se zove *prevojna tačka* ili *tačka infleksije*.

Ako je $y''\neq 0$, neophodni i dovoljni uslovi za maksimum i minimum se izražavaju ovako:

$$y'(x)=0,\quad y''(x)<0 \quad \text{za maksimum}$$

$$y'(x)=0,\quad y''(x)>0 \quad \text{za minimum.}$$

Ako su $y'=0$ i $y''=0$, ne možemo na osnovu samo ovih izvoda ništa kazati o karakteru funkcije u okolini date tačke. U opštem slučaju pitanje se rešava ovom teoremom: *Da bi funkcija jedne nezavisno promenljive imala ekstremum za određenu vrednost argumenta, potrebno je i dovoljno da za tu vrednost uzastopni izvodi budu jednaki nuli i da izvod najnižeg reda koji nije jednak nuli bude parnoga reda; ako je ovaj pozitivan, biće to minimum, ako je negativan — maksimum.*

Opšti postupak za rešavanje zadataka o ekstremumu funkcije jedne nezavisno promenljive ima ove delove:

1. Iz uslova zadatka sastaviti funkciju $y=f(x)$, koja odgovara problemu, i odrediti interval $[a, b]$, u kojem se ona može menjati prema uslovima problema.

2. Odrediti izvod $y'=f'(x)$.

3. Naći korene jednačine $y'(x)=0$. Oni određuju apscise stacionarnih tačaka. Označimo ih sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i to one koje pripadaju intervalu $[a, b]$.

4. Proučiti promenu znaka izvoda $y'(x)$ pri prolazu kroz svaku stacionarnu tačku M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Ako je $y'(x)>0$ levo od tačke M_i i $y'(x)<0$ desno od M_i, tački M_i odgovara maksimum $y(x_i)$. U suprotnom slučaju imamo, recimo, za tačku M_k, pod uslovima $f'(x)<0$ levo i $f'(x)>0$ desno, minimum. Ako takvo određivanje znakova nije zgodno, može se odrediti drugi izvod $y''(x)$; znak tog izvoda za odgovarajući koren određuje vrstu ekstremuma. Ako je drugi izvod jednak nuli, treba produžiti postupak prema navedenoj teoremi.

Primedbe. 1. Najveći od maksimuma (maximum maximorum) i najmanji od minimuma (minimum minimorum) određuju se neposrednim upoređivanjem.

2. Kako smo naveli, od pojma ekstremuma neprekidne diferencijabilne funkcije treba razlikovati opštiji pojam najveće i najmanje vrednosti funkcije u datoj tački, u kojoj funkcija može ili sasvim nemati jedinstvene tangente ili imati tangentu paralelnu sa Oy osom (sl. 62). I takve najmanje i najveće vrednosti ponekad se zovu ekstremumi, ali za razliku od prvih, koji se zovu *relativni ekstremumi*, ovi, bez tangente, imaju naziv *apsolutnih ekstremuma*. Radi kratkoće izražavanja zaustavimo se samo na uslovima za maksimum. Uslov za apsolutni maksimum traži upoređivanje samo funkcije $f(x)$ i vrednosti $f(x\pm\varepsilon)$. bez dopunskog uslova $y'(x)=0$. Ali i za apsolutni i za relativni maksimum način upoređivanja ima dve forme: $f(x)>f(x\pm\varepsilon)$ za tzv. *pravi maksimum* i slabiji uslov $f(x)\geqslant f(x\pm\varepsilon)$ za *nepravi maksimum*, gde je ε beskrajno mala veličina, pri čemu za apsolutni ekstremum možemo uzimati ε samo sa jednim znakom.

3. U slučaju kad $f'(x)\to\infty$ za konačnu vrednost x imamo (sl. 62 c) apsolutni ekstremum (maksimum) u tzv. *kopljastoj tački*. Može se navesti više takvih singularnih tačaka za koje funkcija ima samo apsolutni ekstremum, jer ne zadovoljava uslove relativnog ekstremuma.

Funkciji $z=f(x,y)$ odgovara površina. U tački $M(a,b,c)$, gde je $c=f(a,b)$, funkcija $f(x,y)$ može imati ekstremum, ako su a i b koreni sistema jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

To su neophodni uslovi ekstremuma funkcije dve promenljive. Oni su ekvivalentni uslovu $dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$, koji treba da važi za proizvoljne vrednosti diferencijala dx i dy.

Pod uslovom $dz=0$ dovoljni uslovi za ekstremum mogu se dobiti iz uslova da drugi diferencijal

$$d^2z=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

zadržava stalan znak za proizvoljne vrednosti dx i dy. Ispitivanje tog znaka zavisi od vrednosti diskriminante

$$\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

i dovodi do ovog rezultata

$$\Delta<0,\ \text{postoji ekstremum i to za}\ \begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0 & \text{minimum;}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0 & \text{maximum;}\end{cases}$$

$\Delta>0$, nema ekstremuma;

$\Delta=0$, pitanje ostaje nerešeno.

Uslov $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$ je isključen, jer je on protivrečan uslovu $\Delta<0$.

7*

U slučaju funkcije više promenljivih $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prvi diferencijal treba da bude jednak nuli. Prema tome dolazimo do ovih n neophodnih uslova

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}=0, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}=0.$$

Određivanje prirode ekstremuma zavisi od vrednosti drugog diferencijala $d^2\Phi$. Nećemo ulaziti u proučavanje pojedinih mogućih slučajeva. U većini praktičnih slučajeva karakter ekstremuma je ili neposredno očigledan iz prirode samog zadatka ili zahteva elementarno proučavanje okoline tačke ekstremuma.

Za proučavanje ekstremuma funkcije više promenljivih u oblasti sa određenim granicama treba specijalno proučiti ponašanje funkcije na granici. Takvo proučavanje spada u problem tzv. uslovnog ekstremuma.

Uslovni ekstremum. Neka se traži određivanje ekstremuma funkcije više promenljivih, npr. $z=f(x,y)$, pod pretpostavkom da promenljive x, y moraju zadovoljavati uslov $\varphi(x,y)=0$. To je tzv. *uslovni ekstremum*. Teorija ovog problema dovodi do primene *metode neodređenih množilaca*, koja traži ovaj postupak.

Sastavimo novu funkciju Z od polazne funkcije $z=f(x,y)$ i leve strane uslova $\varphi(x,y)$ prethodno pomnožene *stalnim* neodređenim brojem, koji označimo sa λ. Novu funkciju $Z=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ smatramo kao funkciju dveju, ali sad nezavisno promenljivih x i y. Na tu funkciju možemo primeniti postupak za određivanje ekstremuma funkcije više nezavisno promenljivih. Taj postupak daje dve jednačine

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0.$$

Taj sistem zajedno sa jednačinom $\varphi(x,y)=0$, u opštem slučaju, daje mogućnost odrediti tri nepoznate veličine: x, y, λ.

Za slučaj funkcije $u=f(x,y,z)$ sa dve uslovne jednačine $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ uzima se nova funkcija

$$\Phi(x,y,z;\ \lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z),$$

u kojoj su x, y, z nezavisno promenljive i λ, μ konstante. Uslovi ekstremuma daju ovaj sistem od tri jednačine

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial z}=0.$$

Ove tri jednačine zajedno sa jednačinama $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ služe za određivanje pet nepoznatih: x, y, z, λ, μ.

Prema tome možemo naglasiti ovo *Ajlerovo pravilo:*

Ako se traži ekstremum date funkcije više promenljivih, vezanih jednom ili većim brojem jednačina, treba levu stranu svake veze pomnožiti neodređenim množiocem i dodati datoj funkciji. A zatim se određivanje ekstremuma funkcije vrši po pravilu ekstremuma za funkciju više nezavisno promenljivih.

3.52. Neodređeni izrazi

Ako treba izračunati vrednost količnika $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ za $x=a$, kad je $f(a)=0$ i $\varphi(a)=0$, onda se dobiva ili izraz $\frac{0}{0}$, kome ne odgovara nikakav broj, ili jednakost $y\times 0=0$, koja ostaje tačna za svaku vrednost y, pa prema tome vrednost količnika za $x=a$ neodređena, a sam količnik pod uslovima $f(a)=0$ $\varphi(a)=0$ je *neodređen izraz*.

Međutim, kad počnemo proučavati izraz količnika u blizini $x=a$, tj. za $x=a+h$, može se dogoditi da $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ ima potpuno određenu vrednost. Tako je npr. $\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)_{x=2}=\frac{0}{0}$,

a $$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{2+h-2}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4.$$

Primetimo da smo količnik skratili sa $h\neq 0$ *pre prelaza* na graničnu vrednost, a to je potpuno zakonita matematička operacija.

U rezultatu primene Košijeve teoreme i prelaza na graničnu vrednost dobija se ovaj rezultat za dobijanje *prave vrednosti neodređenog izraza*

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}.$$

Ovim se izražava tzv. Lopitalovo (L' Hospital) pravilo, koje glasi:

Za određivanje prave vrednosti količnika $f(x):\varphi(x)$ za $x=a$ kada je $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$, treba diferencirati posebno brojilac i posebno imenilac, pa u dobiveni količnik staviti $x=a$. Ako ovaj količnik ima određenu vrednost, ona predstavlja i pravu vrednost polaznog količnika; ako ponovo dobijemo neodređeni izraz $0:0$, treba Lopitalov postupak ponoviti.

Primetimo da je ovo posebno diferenciranje brojioca i imenioca dozvoljeno samo u slučaju neodređenosti količnika. Zato je pre tog posebnog diferenciranja zgodno staviti izraz $\frac{0}{0}$ kao simboličku oznaku opravdanja posebnog diferenciranja.

Primeri:

1. $\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)_{x=2}=\frac{0}{0}=\left[\frac{2x}{1}\right]_{x=2}=4.$

2. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{\cos x}{1}\right)_{x=0}=1.$

3. $\left(\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{-\sin x}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=$

$$=\left(\frac{e^{x^2}\cdot 4x^2+e^{x^2}\cdot 2}{-\cos x}\right)_{x=0}=-2.$$

Na oblik $\frac{0}{0}$ mogu se svesti i druge neodređenosti čiji se oblici simbolički označavaju ovako

$$\frac{\infty}{\infty};\ 0\times\infty;\ 0^0;\infty^0;\ 1^\infty;\infty-\infty.$$

Slučaj $\frac{\infty}{\infty}$. $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}.$

Primeri: 1. $\left[\frac{1-2x-x^2}{5x^2+1}\right]_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{-2-2x}{10x}\right]_{x=\infty}=$

$$=\frac{\infty}{\infty}=\frac{-2}{10}=-0{,}2.$$

2. $\left(\frac{x+\lg x}{x\lg x}\right)_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{1+\frac{1}{x}}{\log x+1}\right]_{x=\infty}=\frac{1}{\infty}=0.$

Slučaj $0\times\infty$. $[f(x)\cdot\varphi(x)]_{x=a}=0\times\infty=\left[\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_{x=a}=$

$$=\frac{0}{0}=\left[\frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}\right]_{x=a}\quad \text{ili}$$

$$[f(x)\cdot\varphi(x)]_{x=a}=0\times\infty=\left[\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Za slučajeve 0^0, ∞^0, 1^∞ treba izraz $y=u^v$ prethodno logaritmovati po prirodnoj osnovi $\lg y=\log(u^v)=v\ \lg u$; taj izraz se javlja kao neodređenost oblika $0\times\infty$, pa se svodi ili na $\frac{0}{0}$ ili na $\frac{\infty}{\infty}$. Ako izračunamo pravu vrednost, recimo A, tog proizvoda, iz $\lg y=A$ dolazimo do vrednosti $y=e^A$.

Slučaj $\infty-\infty$ u obliku $\infty_1-\infty_2=\infty_1\left(1-\frac{\infty_2}{\infty_1}\right)$, sa pretpostavkom da $\left(\frac{\infty_2}{\infty_1}\right)\to 1$, svodi se na slučaj $\infty_1\times 0$, a zatim na slučaj kad se može primeniti Lopitalovo pravilo.

Primeri. 1. $\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right]_{x=0}=\infty_1-\infty_2=\left[\frac{\sin x-x}{x\sin x}\right]_{x=0}=$

$$=\frac{0}{0}=\left[\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}=$$

$$=\left[\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}\right]_{x=0}=\frac{0}{2}=0.$$

2. $y=[x^x]_{x=0}$. $\lg y=(x\lg x)_{x=0}$; $(x\lg x)_{x=0}=\left[\frac{\lg x}{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}=$

$$=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right]_{x=0}=[-x]_{x=0}=0.$$

$\lg y=0$, $(x^x)_{x=0}=e^0=1$.

3.53. Obične i singularne tačke

Uzmimo tačku M (sl. 63a, b, c) na krivoj čija je jednačina $f(x,y)=0$ i konstruišimo kružnu liniju beskrajno malog poluprečnika ρ sa centrom u tački M. Pomoću tog kružića može se oceniti karakter krive oko tačke M.

Ako kriva u tački M ima određenu tangentu i presečne tačke M' i M'' krive sa nacrtanom kružnom linijom se nalaze na suprotnim stranama od tačke M i njihova rastojanja od tangente su beskrajno mala drugoga reda u odnosu na ρ, tačka M je *obična tačka* krive (sl. 63a, b,c); u specijalnom slučaju, kad se tačke M' i M'' nalaze sa raznih strana od tangente obična tačka M (sl. 63c) se zove *prevojna tačka* krive.

Svaka tačka krive koja nema osobina obične tačke je *singularna tačka* krive. Navedimo nekoliko primera singularnih tačaka (sl. 63 d — l) sa njihovim nazivima.

Na slici 63 d—dvostruka tačka sa dve tangente, a može biti i višestruka; to je presek više grana krive.

Sl. 63 e — prelomna tačka, bez produženja krive sa druge strane od tačke M.

Sl. 63 f — krajnja tačka.

Sl. 63 g — izolovana tačka.

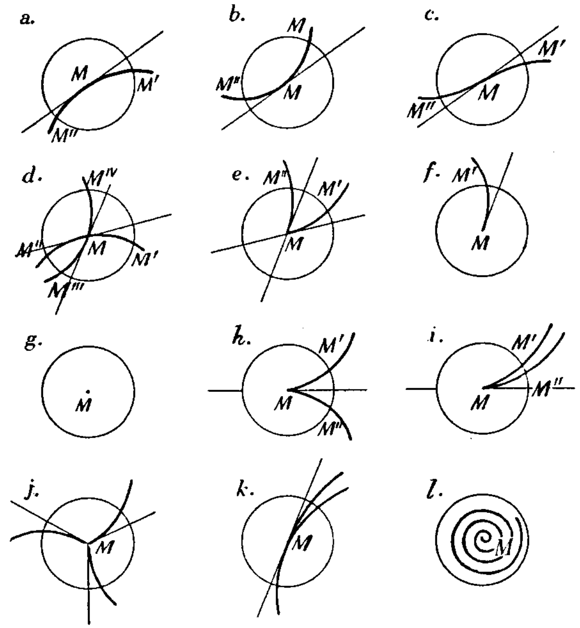
Sl. 63 h — povratna ili kopljasta tačka, povratna tačka prve vrste.

Sl. 63 i — kljunasta tačka, povratna tačka druge vrste.

Sl. 63 j — tačka bifurkacije ili grananja.

Sl. 63 k — obična kriva se razdvaja posle tačke M u dve dodirne grane.

Sl. 63 l — asimptotska tačka krive.



Sl. 63 — Obične i singularne tačke

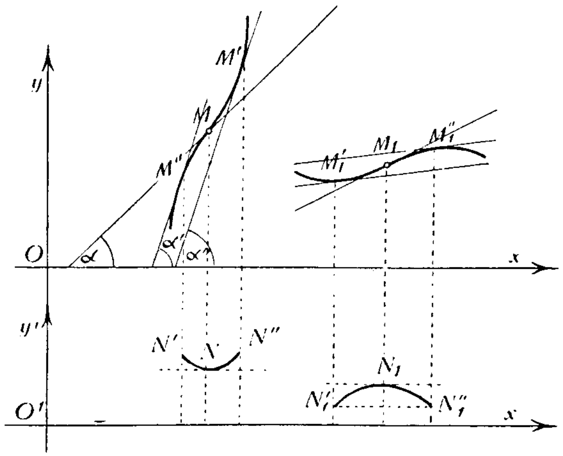
O analitičkom određivanju singularnih tačaka govorićemo na drugom mestu.

3.54. Prevojne tačke. Konkavnost i konveksnost

U prethodnom paragrafu smo definisali pojam prevojne tačke za proizvoljni položaj tangente na krivu. Neposredno posmatranje (sl. 64) krive u blizini prevojne tačke pokazuje da ugaoni koeficijent tangente, tj. y', u prevojnoj tački ima stacionarnu vrednost i prema tome je neophodan uslov pre-

vojne tačke je $y''=0$, i to bez obzira na vrednost y'. Ali, slično uslovu ekstremuma, dopunski, dovoljan uslov zahteva $y''' \neq 0$. U opštem slučaju imamo ove uslove za prevojnu tačku:

$$y''=y'''=\cdots=y^{(2k)}=0;\quad y^{(2k+1)}\neq 0.$$



Sl. 64 — Prevojna tačka

Ako je tangenta paralelna Oy osi, uslovi prevojne tačke su:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=0,\ \frac{d^3x}{dy^3}\neq 0.$$

Za krivu određenu jednačinom (1) $F(x,y)=0$ iz jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0$$

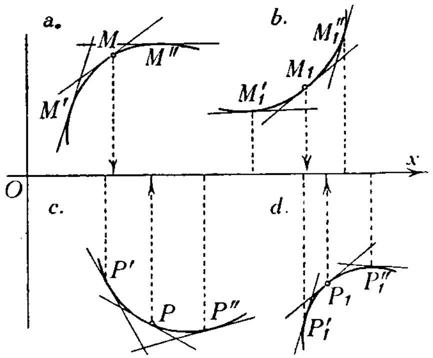
pri uslovu $y''=0$ posle eliminisanja y' dolazimo do jednačine

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0,$$

koja zajedno sa jednačinom (1) određuje koordinate x, y prevojne tačke.

Ako je kriva određena u parametarskom obliku $x=x(t)$, $y=y(t)$, vrednost parametra t za prevojnu tačku se određuje iz jednačine $x'y''-y'x''=0$ pod uslovom $x'y'''-y'x'''\neq 0$.

Konveksnost i konkavnost. Kriva je udubljena (konkavna) u okolini date tačke $M(a)$, ako se posmatrač i dve tačke krive sa apscisama $(a-\varepsilon)$ i $(a+\varepsilon)$ nalaze sa iste strane od tangente; kriva je ispupčena (konveksna), ako se posmatrač i dve tačke krive nalaze sa raznih strana od tangente.



Sl. 65 — Konkavnost i konveksnost krive

Ako beskrajno udaljeni posmatrač gleda na tačku M krive iz pozitivnog pravca Oy ose, kriva će biti konkavna, ako je $y''>0$ i konveksna, kad je $y''<0$.

Ako je zgodnije ocenjivati krivu iz tačke na Ox osi, uslove konkavnosti i konveksnosti treba napisati ovako; kriva je konkavna, ako je $yy''<0$, i konveksna, ako je $yy''>0$. Na slici (sl. 65) dati su primeri.

Glava četvrta

INTEGRALNI RAČUN

4.1. Izvod i prvobitna funkcija. Pojam neodređenog integrala

U obrascima diferencijalnog računa

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x), \quad \text{odnosno} \quad dF(x)=f(x)\,dx$$

funkcija $F(x)$ je data, a traži se fukcija $f(x)$, izvod date funkcije $F(x)$. Operacija određivanja izvoda, odnosno diferencijala, je *diferenciranje*.

Obrnuta operacija, određivane *prvobitne funkcije* $F(x)$, čiji je izvod data funkcija $f(x)$, zove se *integracija*, a izvođenje te operacije — *integrisanje*.

Pošto se prvobitnoj funkciji uvek može, za datu istu funkciju $f(x)$ dodati proizvoljna konstanta C, jer je

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+C\right]=\frac{d}{dx}F(x)=f(x),$$

prvobitna funkcija se, u potpunosti, ne određuje izvodom $f(x)$.

Zbir funkcije i proizvoljne konstante, čiji je izvod data funkcija, zove se neodređeni integral te funkcije.

Oznaka neodređenog integrala

$$\int f(x)\,dx$$

sastoji se iz *znaka integrala* (razvučeno početno slovo S reči Summa), *podintegralne funkcije* ili *integranda*, to je dati izvod tražene funkcije, i *diferencijala dx* koji pokazuje promenljivu po kojoj se vrši integracija. Proizvod $f(x)\,dx$ se zove *element*

neodređenog integrala. Funkcija $F(x)$ se, sem naziva *prvobitne funkcije*, zove takođe *primitivna funkcija*. Zbir $F(x)+C$ je *neodređeni integral*, prema tome imamo osnovni obrazac

$$\text{(I)} \qquad \int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

4.2. Tablica osnovnih integrala

(I) $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, u ostalim obrascima C je izostavljeno.

(II) $\int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx,\quad A=\text{const.}$

(III) $\int (u\pm v)\,dx=\int u\,dx\pm\int v\,dx.$

(IV) $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad n\neq -1,$ (IV^bis) $\int \frac{dx}{x}=\lg x.$

(V) $\int e^x\,dx=e^x,$ (V^bis) $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\lg a},$

(VI) $\int \sin x\,dx=-\cos x,$ (VI^bis) $\int \cos x\,dx=\sin x.$

(VII) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x,$ (VII^bis) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{cotg} x.$

(VIII) $\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+C=-\operatorname{arc\,cotg} x+C_1.$

(IX) $\int \frac{dx}{1-x^2}=\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\;(=Ar\operatorname{tgh} x)=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}.$

(X) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C_1.$

(XI) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\lg(x+\sqrt{1+x^2})\;(=Ar\operatorname{sh} x).$

(XI^bis) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\lg(x+\sqrt{a^2+x^2})\;\left(=Ar\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right).$

Tim osnovnim obrascima, koje treba upamtiti, dodajmo još nekoliko integrala, koji su od koristi pri upotrebi hiperboličkih i njima inverznih funkcija. Oni su označeni odgovarajućim arapskim ciframa prema odgovarajućim obrascima označenim rimskim ciframa.

$$(6) \quad \int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x, \qquad (6^{\text{bis}}) \quad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x.$$

$$(10) \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{tgh} x, \qquad (10^{\text{bis}}) \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = -\operatorname{ctgh} x.$$

A možemo dodati još i ovu grupu integrala, kojih nema u tablici.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\lg \cos x, \qquad \int \operatorname{th} x\, dx = \lg \operatorname{ch} x,$$

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \lg \sin x, \qquad \int \operatorname{cth} x\, dx = \lg \operatorname{sh} x.$$

4.3. Elementarne metode integracije

1. *Metoda neposredne integracije na osnovu tablice integracije.*

a. Ako je $\int f(x)\, dx = F(x)$, onda je:

α. $\int f(ax)\, dx = \frac{1}{a} F(ax)$; β. $\int f(x+b)\, dx = F(x+b)$;

γ. $\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b)$.

b. $\left[\int f(x)\, dx\right]' = f(x)$. Obrazac za proveravanje rezultata.

c. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \lg |f(x)|$. Integral logaritamskog izvoda.

d. $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$.

2. *Metoda zamene.*

Primeri: 1. $\int \frac{dx}{x-2}$. Stavimo $x-2=z$ i određujem

$dx = dz$, $\int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{dz}{z} = \lg z = \lg(x-2) + C$. 2. $\int (5x-3)^4 d$

Stavimo: $5x-3=z$, $5dx = dz$; $\int (5x-3)^4\, dx = \frac{1}{5} \int z^4\, dz$

$= \frac{1}{25} z^5 = \frac{1}{25}(5x-3)^5 + C$. 3. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Stavimo: $\sqrt{1+x^2}$ =

ili, bolje: $1+x^2 = z^2$, odakle je $x\, dx = z\, dz$. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \int \frac{z\, dz}{z} = \int dz = \sqrt{1+x^2} + C$.

Opšti obrazac, koji se može priključiti tablici osnovn integrala, za primenu metode zamene:

(XII) $\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(z)]\, \varphi'(z)\, dz = F(z) + C = F[\psi(x)]$ $+ C$, pri čemu je $x = \varphi(z)$ i $z = \psi(x)$ je inverzna funkci

3. *Metoda delimične integracije.* Iz obrasca diferencijaln računa za diferencijal proizvoda dve funkcije

$$d(uv) = udv + vdu$$

sleduje ovaj obrazac

$$\text{(XIII)} \qquad \int udv = uv - \int vdu$$

integralnog računa, koji takođe uključujemo u tablicu os vnih integrala.

Primer primene. Od integrala $\int xe^x\, dx$ uzmimo deo p integralne funkcije i stavimo $e^x\, dx = dv$, odakle je $v = \int e^x\, dx$ $= e^x$, prema tome je $\int xe^x\, dx = \int xde^x$. Sad primenjujemo ob zac (XIII): $\int xde^x = xe^x - \int e^x\, dx$, odakle konačno izvodi $\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$. Pošto smo u toku iz čunavanja izvršili prethodnu integraciju samo sa delom p integralne funkcije, ova metoda se zove *metoda delimične*

parcijalne integracije. Obrazac (XIII) zove se *obrazac za delimičnu integraciju.*

Primeri: 1. $\int x \sin x \, dx = \int x \, d(-\cos x) =$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

2. $\int \lg x \, dx = x \lg x - \int x d \lg x =$

$$x \lg x - \int dx = x (\lg x - 1) + C.$$

4. *Metoda redukcije.* U vezi sa metodom delimične integracije stoji *metoda redukcije.* Objasnićemo je na primeru.

$I_n = \int \sin^n x \, dx$. Primenimo delimičnu integraciju.

$$I_n = \int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-1} x (\sin x \, dx) = \int \sin^{n-1} x d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + \int \cos x d(\sin^{n-1} x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x +$$

$$+ (n-1) [\int \sin^{n-2} x \, dx - \int \sin^n x \, dx] = -\sin^{n-1} x \cos x +$$

$(n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$. Ako član sa I_n prebacimo na levu stranu, dobićemo obrazac

$$n I_n = (n-1) I_{n-2} - \sin^{n-1} x \cos x,$$

koji se zove *redukcioni obrazac.* Uzastopnom primenom ovog obrasca može se izračunati svaki takav integral ako je n prirodni broj. Ako je n paran broj dolazimo do integrala $I_0 = \int \cdot dx = x + C$, a ako je n neparan broj, redukcija daje integral $I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x + C$, i time se završava integracija.

Slično se izračunava integral $I_n^* = \int \cos^n x \, dx$, za koji redukcioni obrazac izgleda ovako

$$n I_n^* = (n-1) I^*_{n-2} + \cos^{n-1} x \sin x.$$

4.41. Integracija racionalnih funkcija

U opštem slučaju racionalna funkcija promenljive x je količnik dva polinoma po x sa konstantnim koeficijentima, tj. $P(x) : Q(x)$, gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi. Ako je stepen polinoma $P(x)$ veći ili jednak stepenu polinoma $Q(x)$, može se deljenjem sa $Q(x)$ izdvojiti polinom $R(x)$ i tada dobiti ovaj opšti obrazac za racionalnu funkciju

$$R(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

gde je $n > m$.

Za integraciju članova polinoma $R(x)$ kao zbira članova oblika $a_k x^k$, gde je a_k konstanta, treba izvršiti integracije ovog tipa $\int a_k x^k \, dx = a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Za integraciju količnika $P_m : Q_n$ treba prethodno izvršiti algebarsku operaciju *razlaganja količnika na elementarne razlomke.* To se vrši na ovaj način.

Rešava se jednačina $Q_n(x) = 0$, koja može imati korene ovog karaktera:

1° realne proste korene oblika, recimo, a,
2° realne višestruke korene, k-toga reda, oblika b_k,
3° imaginarne proste konjugovane korene oblika

$$\alpha + \beta i, \quad \alpha - \beta i,$$

4° imaginarne višestruke konjugovane korene, reda s oblika $\alpha_s + \beta_s i$, $\alpha_s - \beta_s i$.

Prema tome pri razlaganju polinoma $Q_n(x)$ na množioce se pojavljuju ovi tipovi realnih množilaca

$$x - a, \ (x - b_k)^k, \ (x - \alpha)^2 + \beta^2, \ [(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2]^s$$

Kako se to pokazuje u Algebri količnik $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se može predstaviti zbirom, i to samo na jedan jedini način, elementarnih razlomaka ovih tipova:

$$\frac{A}{x-a}, \ \frac{B_i}{(x-b_k)^i} \ (i = 1, 2, \ldots, k), \ \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

$$\frac{M_j x + N_j}{[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^j} \quad (j=1, 2, \ldots, s),$$

gde su A, B_i, M, N, M_j, N_j koeficijenti, koji se određuju *metodom neodređenih koeficijenata*.

Posle toga se integral

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\, dx$$

zamenjuje zbirom integrala elementarnih razlomaka. U opštem slučaju mogu se pojaviti ovi integrali:

1° $\int \frac{A}{x-a}\, dx = A \lg(x-a)$,

2° $\int \frac{B_i}{(x-b_k)^i}\, dx = B_i \frac{(x-b_k)^{-i+1}}{-i+1}$,

3° $\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\, dx$ posle zamene $x-\alpha=\beta z$ prelazi u zbir integrala

$$\frac{1}{2} M \int \frac{d(1+z^2)}{1+z^2} + \frac{M\alpha+N}{\beta} \int \frac{dz}{1+z^2}$$ i prema tome se izražava pomoću $\lg(1+z^2)$ i arc tg z.

4° Najzad integral $\int \frac{M_j \alpha + N_j}{[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^j}\, dx$, opet posle zamene $x-\alpha_s=\beta_s$ se izražava pomoću integrala

$$\int \frac{d(1+z^2)}{(1+z^2)^j} \text{ i } \int \frac{dz}{(1+z^2)^j}.$$

Prvi je jednak $(1+z^2)^{1-j}:(1-j)$, a za drugi posle identične zamene $1\equiv 1+z^2-z^2$ i primene metode delimične integracije na jedan od integrala dobivamo redukcioni obrazac

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^j} = \frac{2j-3}{2j-2} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{j-1}} + \frac{1}{2(j-1)} \frac{z}{(1+z^2)^{j-1}},$$

koji stepen imenioca snižava za jedinicu. Primena ovog obrasca dovoljan broj puta dovodi do integrala $\int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} z + C$, koji i završava izračunavanje integrala četvrtog tipa.

Time se iscrpljuje teorija integracije racionalnih funkcija. U rezultatu integracije mogu se pojaviti samo: racionalne funkcije, logaritmi i arktangensi. Karakter konačnog odgovora zavisi od prirode korena imenioca podintegralne funkcije.

4.42. Integracija iracionalnih funkcija

Pošto se u opštem slučaju integrali sa iracionalnom podintegralnom funkcijom ne izražavaju u racionalnim, algebarskim i elementarnim transcendentnim funkcijama, proučavanje integrala iracionalnih funkcija se deli na dva uslovna dela— u elementarni deo koji se odnosi samo na one slučajeve kad se ipak takvi integrali izražavaju u elementarnoj formi i na drugi deo kad su odgovarajući neodređeni integrali izvor transcendentnih funkcija nove, ne elementarne prirode. Ovde se proučavaju integrali iz prvog dela. Iz drugog dela je navedeno samo nekoliko primera.

1. $\int R(x, D^p, D^q, \ldots,)\, dx$, gde su: R simbol racionalne funkcije, $D=\frac{ax+b}{cx+d}$, $p, q, \ldots$ racionalni razlomci. Ako iskoristimo zamenu $D=t^N$, gde je N zajednički imenilac razlomaka $p, q, \ldots$, promenljive $x, dx/dt$ i svi stepeni D sa izložiocima $p, q, \ldots$, izražavaju se kao racionalne funkcije promenljive t. Dati integral se svodi na integral racionalne funkcije nove promenljive.

2. Tzv. *integral binomnog diferencijala* u obliku

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx,$$

gde su: a i b proizvoljni realni brojevi, m, n, p — racionalni brojevi.

Ovaj integral se izražava u elementarnim funkcijama samo u ovim slučajevima:

a. p je ceo broj. Ako je p pozitivan broj, posle razvijanja binoma, podintegralna funkcija se javlja kao zbir članova Ax^k, gde su A i k konstante. Integracija se vrši neposredno. Ako je p negativan ceo broj, zamena $x=z^N$, gde je N zajednički imenilac brojeva m i n, dovodi podintegralnu funkciju do racionalnog oblika funkcije promenljive z.

b. $\frac{m+1}{n}$ je ceo broj. Ako je $p=\frac{r}{s}$ zamena $a+bx^n=z^s$ pretvara podintegralnu funkciju u racionalnu funkciju z.

c. $\frac{m+1}{n}+p$ je ceo broj. Zamena $a+bx^n=x^n z^s$ isto tako racionalizuje podintegralnu funkciju.

Još je Njutn umeo da izvrši integraciju u ovim slučajevima, ali tek je P. L. Čebišev dokazao da se samo u ovim slučajevima rezultati integracije izražavaju elementarnim funkcijama.

3. Integrali koji racionalno zavise od kvadratnog korena $\sqrt{ax^2+2bx+c}$.

Pre svega treba primetiti da se metodom dopune do totalnog kvadrata koren iz kvadratnog trinoma može uprostiti i svesti na jedan od tzv. *standardnih oblika korena* iz kvadratnog binoma, koji se nalaze u tablici osnovnih integrala.

Pri $a>0$, $\sqrt{ax^2+2bx+c}=\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{(ax+b)^2\pm k^2}$, gde je $k^2=|b^2-ac|$ i za $b^2-ac>0$ treba staviti znak minus, a za $b^2-ac<0$ znak plus.

Pri $a<0$, $\sqrt{ax^2+2bx+c}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\sqrt{k^2-(ax+b)^2}$, gde je $k^2=b^2-ac$, pri čemu se zaustavljamo na slučaju realnog korena kad je $b^2-ac>0$.

Posle uvođenja linearne zamene $ax+b=kz$ podintegralna funkcija može da zavisi samo od jednog od *standardnih korena*

$$\sqrt{z^2\pm 1} \quad \text{i} \quad \sqrt{1-z^2}$$

Od tih korena zavise pre svega ova tri osnovna integrala

$$\text{(X)} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x, \quad \text{(XI)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\lg(x+\sqrt{1+x^2}),$$

$$\text{(XI)}^{\text{bis}} \int \frac{dx}{\sqrt{-1+x^2}}=\log(x+\sqrt{-1+x^2}),$$

pri čemu u trećem integralu stoji -1 mesto a^2, a mogli bismo staviti i neku i drugu konstantu, obrazac ostaje na snazi.

Proučimo još ova dva integrala: $\int\sqrt{x^2\pm 1}\,dx$ i $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. Pomoćno pravilo: pošto u odgovarajućim osnovnim integralima koren stoji u imeniocu, u datim i sličnim integralima koren treda prevesti u imenioc. To se radi na ovaj način:

$$I=\int\sqrt{x^2\pm 1}\,dx=\int\frac{x^2\pm 1}{\sqrt{x^2\pm 1}}dx=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2\pm 1}}\pm$$

$$\pm\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}},$$ drugi integral je osnovni, a prvi posle delimičnog integrisanja dovodi do rezultata $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2\pm 1}}=x\sqrt{x^2\pm 1}-$ $-I$, a to dovodi do jednačine za određivanje $2I$. Na sličan način se računa i integral $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Na sličan način se računaju i integrali:

$$\int\frac{Mx+N}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{i} \quad \int\frac{Mx+N}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Uzmimo još slučaj kad u imeniocu ispred korena stoji neki promenljiv činilac, recimo x, $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$. Zamenom $x=z^{-1}$, $dx=-z^{-2}\,dz$, $z=x^{-1}$ dati integral dobiva oblik $\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$ osnovnog integrala.

4. U teoriji integrala, koji zavise od korena $\sqrt{ax^2+bx+c}$, važnu ulogu igraju *Ajlerove supstitucije* (zamene), koje ne traže prethodno dovođenje korena do standardnog oblika, već neposredno svode podintegralnu funkciju na racionalan oblik.

1. $\sqrt{ax^2+bx+c}=z\pm x\sqrt{a}$, 2. $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$, 3. $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=z(x-\alpha)$. Uslovi upotrebe 1. za $a>0$, 2. $c>0$, 3. koreni trinoma α i β su realni.

4.43. *Integracija nekih transcendentnih funkcija*

Sem integrala transcendentnih funkcija navedenih u tablici, navedimo sa primedbama ove integrale.

1. $I_n = \int x^n e^x \, dx$, gde je n ceo pozitivan broj. Delimična integracija daje ovaj redukcioni obrazac: $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$. Za $n<0$ imamo slični obrazac $I_n = \frac{1}{n+1}[x^{n+1} e^x - I_{n+1}]$.

2. $\int f(e^x)\,dx = \int \frac{f(z)}{z} dz$, gde je $e^x = z$, $dz = e^x\,dx = z dx$

3. Jednostavni trigonometrijski integrali

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\lg \cos x + C.$$

Slično, $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \lg \sin x + C$.

4. $\int \frac{dx}{\sin x}$ i $\int \frac{dx}{\cos x}$. Uopšte važna za trigonometriske funkcije zamena $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, odakle je $\frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = dz$. $\int \frac{dx}{\sin x} =$

$$= \int \frac{dx}{2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{tg}\frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{dz}{z} =$$

$$= \lg z + C = \lg \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C. \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{-d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -$$

$$-\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

5. Primena delimične integracije dovodi do rezultata.

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + $$
$$+ \sqrt{1-x^2} + C.$$

6. Integracija trigonometrijske funkcije posle podesne transformacije te funkcije.

$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$, gde su a i b stalne veličine. Stavimo $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$, gde su r i φ nove pomoćne konstante; sa novom promenljivom $x + \varphi = z$ imamo:

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \int \frac{dz}{r \sin z} = \frac{1}{r} \lg \operatorname{tg} \frac{z}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}\left(x + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right) + C.$$

7. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, gde je R simbol racionalne funkcije, posle zamene $z = \operatorname{tg}\frac{a}{2}$, pretvara se u integral racionalne funkcije z. Navedimo i ovde obrasce ove smene: $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2z}{1-z^2}$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$.

8. Obrasci za integrale stepena $\sin x$ i $\cos x$ (skraćene oznake $\cos x = c$, $\sin x = s$).

$$\int \cos^m x \sin^n x \, dx = \frac{c^{m-1} s^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int c^{m-2} s^n \, dx =$$

$$= -\frac{s^{n-1} c^{m+1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int c^m s^{n-2} \, dx;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x \sin^m x} dx = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{s^{m-1} c^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{s^m c^{n-2}} =$$

$$= -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{s^{m-1} c^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{s^{m-2} c^n};$$

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = -\frac{c^{m+1}}{(n-1) s^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{c^m \, dx}{s^{n-2}} =$$

$$= \frac{c^{m-1}}{(m-n) s^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{c^{m-2}}{s^n} dx;$$

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx = \frac{s^{m+1}}{(n-1)c^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{s^m dx}{c^{n-2}} =$$

$$= -\frac{s^{m-1}}{(m-n)c^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{s^{m-2}}{c^n} dx.$$

Ako su m i n celi brojevi pomoću ovih redukcionih obrazaca napisani integrali mogu se svesti na ove jednostavne integrale:

$$\int dx, \int \sin x\, dx, \int \cos x\, dx, \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x}, \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x},$$

$$\int \sin x \cos x\, dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}, \int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Pošto proučavanje drugih specijalnih tipova integrala transcendentnih funkcija izlazi iz okvira ove knjige, poneki od tih integrala se daju u tablici neodređenih integrala.

4.44. *Primedbe o funkcijama koje se određuju integralima*

Kao što je poznato, svaka obrnuta matematička operacija je izvor novih funkcionalnih veza. Operacija određivanja neodređenog integrala, kao operacija obrnuta operaciji diferenciranja, isto tako dovodi do novih funkcionalnih veza, toliko važnih da je dublje proučavanje tih veza otvorilo novu epohu u istoriji razvitka matematičkog znanja. U prvoj fazi te epohe se pojavila *Teorija eliptičkih integrala i funkcija*, po nazivu vezana za problem određivanja dužine eliptičkog luka. A. M. Legendre (1752—1833) je razvio teoriju *eliptičkog integrala* $\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx$, gde je R simbol racionalne funkcije i $P(x)$ polinom trećeg ili četvrtog stepena, i pokazao da se takav integral može svesti na *tri osnovna eliptička integrala, prve, druge i treće vrste* i to:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \quad \int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

gde su k i h konstante, pri čemu h može biti imaginarna veličina. k je prav razlomak, tj. $0<k<1$, zove se *modul eliptičkog integrala*. Posle smene $z = \sin\varphi$ se dobiva još jednostavnija forma *Ležandrovih eliptičkih integrala*:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Od drugih integrala, koji se ne izražavaju elementarnim funkcijama, navedimo još ove integrale: $\int \frac{\sin x}{x} dx$; $\int \frac{\cos x}{x} dx$; $\int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{dt}{\lg t}$ $(x = \lg t)$. Pod određenim uslovima svaki od njih dovodi do nove transcendente funkcije, naime: *integralnog sinusa, integralnog kosinusa i integralnog logaritma* (str.).

4.45. *Tablica neodređenih integrala*

(Konstanta C je izostavljena)

A. Integrali racionalnih funkcija

1. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{(n-1)\,b\,(a+bx)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$$

2. $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \lg|a+bx|.$$

3. $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bx)^{n-1}}\right].$$

4. $$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[a+bx-a\lg|a+bx|].$$

5. $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^n}=\frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)(a+bx)^{n-3}}+\right.$$
$$\left.+\frac{2a}{(n-2)(a+bx)^{n-2}}-\frac{a^2}{(n-1)(a+bx)^{n-1}}\right].$$

6. $$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx}=\frac{1}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^2}{2}-2a(a+bx)+a^2\lg|a+bx|\right].$$

7. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)}=-\frac{1}{a}\lg\left|\frac{a+bx}{x}\right|.$$

8. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2}=-\frac{1}{a^2}\left[\lg\left|\frac{a+bx}{x}\right|+\frac{bx}{a+bx}\right].$$

9. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)}=-\frac{1}{a^2}\left[\frac{a+bx}{x}-b\lg\left|\frac{a+bx}{x}\right|\right].$$

10. $$\int \frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x,\ (ab>0).$$

11. $$\int \frac{dx}{a-bx^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\lg\left|\frac{a+x\sqrt{ab}}{a-x\sqrt{ab}}\right|,\ (ab>0).$$

12. $$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\lg|a+bx^2|.$$

13. $$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}\ \text{(gl. 10)}.$$

14. $$\int \frac{x^3\,dx}{a+bx}=\frac{x^2}{2b}-\frac{a}{2b^2}\lg|a+bx^2|.$$

15. $$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)}=\frac{1}{2a}\lg\frac{x^2}{|a+bx^2|}.$$

16. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2}\ \text{(g. 10)}.$$

17. $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx^2)}=-\frac{1}{2ax^2}-\frac{b}{2a^2}\lg\frac{x^2}{|a+bx^2|}.$$

18. $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2}\ \text{(vidi 10)}.$$

19. $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx^2)^2}=-\frac{1}{2b(a+bx^2)}.$$

20. $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx^2)^2}=-\frac{x}{2b(a+bx^2)}+\frac{1}{2b}\int\frac{dx}{a+bx^2}\ \text{(gl. 10)}.$$

21. $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{a}{2b^2(a+bx^2)}+\frac{1}{2b^2}\lg|a+bx^2|.$$

22. $$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)^2}=\frac{1}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a^2}\lg\left|\frac{x^2}{a+bx^2}\right|.$$

23. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^2}=-\left[\frac{1}{ax}+\frac{3bx}{2a^2}\right]\frac{1}{a+bx^2}-$$
$$-\frac{3bx}{2a^2}\int\frac{dx}{a+bx^2}\ \text{(gl. 10)}.$$

24. $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx^2)^2}=-\left[\frac{1}{2ax^2}+\frac{b}{a^2}\right]\frac{1}{a+bx^2}-\frac{b}{a^3}\lg\left|\frac{x^2}{a+bx^2}\right|.$$

25. $$\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}},$$
$$(ac-b^2>0).$$

26. $$\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}=-\frac{1}{b+cx},\ (ac-b^2=0).$$

27. $$\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\lg\left|\frac{cx+b-\sqrt{b^2-ac}}{cx+b+\sqrt{b^2-ac}}\right|,$$
$$(ac-b^2<0).$$

28. $$\int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^p}=\frac{1}{2(ac-b^2)(p-1)}\cdot$$
$$\cdot\frac{b+cx}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}}+\frac{(2p-3)c}{2(ac-b^2)(p-1)}\int\frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}}.$$

29. $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}+ (2n-3)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right].$$

30. $$\int \frac{dx}{(x-a)^m(x-b)^n}=\frac{1}{(a-b)^{m+n-1}}\int \frac{(1-z)^{m+n-2}\,dz}{z^m},$$

$$\left(z=\frac{x-a}{x-b}\right).$$

B. Integrali iracionalnih funkcija

31. $$\int \sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{3b}(\sqrt{a+bx})^3.$$

32. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}}\,dx=\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}\,.$$

33. $$\int \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{a+bx}}\,dx=\frac{2}{3b^2}(3\alpha b-2a\beta+\beta bx)\sqrt{a+bx}\,.$$

34. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\,.$$

35. $$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm \lg|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|\,.$$

36. $$\int (x^2+a^2)^{3/2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+ \frac{3a^4}{8}\lg|x+\sqrt{x^2+a^2}|\,.$$

37. $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}- \frac{a^4}{8}\lg|x+\sqrt{x^2+a^2}|\,.$$

38. $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}\,.$$

39. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\lg\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|\,.$$

40. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$$

41. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\lg\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|\,.$$

42. $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\lg|x+\sqrt{a^2+x^2}|\,.$$

43. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}\,.$$

44. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}\,.$$

45. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x}\,.$$

46. $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}\,.$$

47. $$\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+ \frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}\,.$$

48. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\lg\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|\,.$$

49. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}\,.$$

50. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}\,.$$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2ax-x^2)^{3/2}} = \frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}.$

52. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2ax-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a\sqrt{2ax-x^2}}.$

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = \lg\left|x+a+\sqrt{2ax+x^2}\right|.$

54. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x-a}{a}.$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\lg\Big|2cx+b+$

$\displaystyle+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\Big|,\ (c>0).$

56. $\displaystyle\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,dx = \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}-$

$\displaystyle-\frac{b^2-4ac}{8c^{3/2}}\lg\left|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right|,\ (c>0)$

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\text{arc sin}\,\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}},\ (c>).$

58. $\displaystyle\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx = \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}+$

$\displaystyle+\frac{b^2+4ac}{8c^{3/2}}\,\text{arc sin}\,\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}},\ (c>0).$

59. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-$

$\displaystyle-\frac{b}{2c^{3/2}}\lg\left|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right|,\ (c>0).$

60. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a+x)(b+x)}+$

$\displaystyle+(a-b)\lg\left|\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}\right|.$

61. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)}+(a+b)\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}.$

62. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)}-$

$\displaystyle-(a+b)\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}.$

63. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}.$

C. Integrali transcendentnih funkcija

64. $\displaystyle\int x^n e^x\,dx = e^x\left[x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}-\cdots\right.$

$\displaystyle\left.+(-1)^n\cdot n!\right].$

65. $\displaystyle\int \lg x\,dx = x\lg x-x.$

66. $\displaystyle\int \frac{(\lg x)^n}{x}\,dx = \frac{1}{n+1}(\lg x)^{n+1}.$

67. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\lg x} = \lg(\lg x).$

68. $\displaystyle\int x^n\lg x\,dx = x^{n+1}\left(\frac{\lg x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right).$

69. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x.$

70. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x.$

71. $\displaystyle\int \text{tg}^2 x\,dx = \text{tg}\,x-x.$

72. $\displaystyle\int \text{cotg}^2 x\,dx = -\text{cotg}\,x-x.$

73. $\int \frac{dx}{\sin x} = \lg \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$

74. $\int \frac{dx}{\cos x} = \lg \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$

75. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

76. $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{cotg} \frac{x}{2}.$

77. $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos^2 x.$

78. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \lg |\operatorname{tg} x|.$

79. $\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx.$

80 $\int \operatorname{cotg}^n x \, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x \, dx.$

81. $\int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{\sin (m+n) x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n) x}{2(m-n)},$

$(m^2 \neq n^2$; ako je $m^2 = n^2$, gl. 69).

82. $\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin (m+n) x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n) x}{2(m-n)},$

$(m^2 \neq n^2$; ako je $m^2 = n^2$, gl. 70)

83. $\int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos (m+n) x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n) x}{2(m-n)},$

$(m^2 \neq n^2$; ako je $m^2 = n^2$, gl. 77).

84. $\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right); \ (a > b).$

85. $\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \lg \left| \frac{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{b+a}} \right|;$

$(a < b).$

86. $\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}; \ (a > b).$

87. $\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \lg \left| \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} \right|;$

$(a < b).$

88. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{b \operatorname{tg} x}{a} \right).$

89. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} [e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)],$

90. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} [e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)],$

91. $\int e^{ax} \sin^n bx \, dx = \frac{1}{a^2 + n^2 b^2} [e^{ax} \sin^{n-1} bx \, (a \sin bx -$

$- nb \cos bx)] + \frac{n(n-1) b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx \, dx$

92. $\int e^{ax} \cos^n bx \, dx = \frac{1}{a^2 + n^2 b^2} [e^{ax} \cos^{n-1} bx \, (a \cos bx +$

$+ nb \sin bx)] + \frac{n(n-1) b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx \, dx.$

93. $\int x^m \sin ax\, dx = -\frac{x^m}{a}\cos ax + \frac{m}{a}\int x^{m-1}\cos ax\, dx$

94. $\int x^m \cos ax\, dx = \frac{x^m}{a}\sin ax - \frac{m}{a}\int x^{m-1}\sin ax\, dx.$

95. $\int \text{arc}\sin x\, dx = x\, \text{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2}\,.$

96. $\int \text{arc}\cos x\, dx = x\, \text{arc}\cos x - \sqrt{1-x^2}\,.$

97. $\int \text{arc}\,\text{tg}\, x\, dx = x\, \text{arc}\,\text{tg}\, x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2).$

98. $\int \text{arc}\,\text{cotg}\, x\, dx = x\, \text{arc}\,\text{cotg}\, x + \frac{1}{2}\lg(1+x^2).$

99. $\int \text{Arsh}\, x dx = x\, \text{Arsh}\, x - \sqrt{1+x^2}\,.$

100. $\int \text{Arch}\, x dx = x\, \text{Arch}\, x - \sqrt{x^2-1}\,.$

101. $\int \text{Artgh}\, x dx = x\ \text{Artgh}\, x + \frac{1}{2}\lg(1-x^2).$

102. $\int \text{Arctgh}\, x dx = x\, \text{Arctgh}\, x + \frac{1}{2}\lg(x^2-1).$

4.5. Pojam određenog integrala

Pojam određenog integrala se javlja u matematici u raznim formama u zavisnosti, s jedne srane, od postupka formiranja tog pojma, a, sa druge strane, od osobina onih objekata na koje se primenjuje taj pojam.

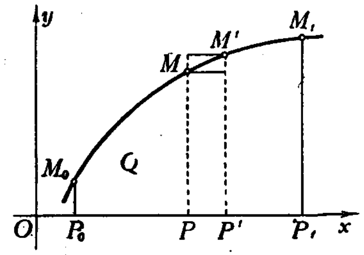
Najprostija definicija određenog integrala je osnovana na neposrednom prelazu od pojma neodređenog na pojam određenog integrala i to uz jednostavno geometrijsko tumačenje.

Ako sa $Q(x)$ označimo površinu nad Ox osom (sl. 66), omeđenu krivom čija je jednačina $y = f(x)$, dvema ordinatama

P_0M_0 i PM; sa apscisama a i x, i delom Ox ose P_0P, onda se pokazuje da je $\frac{dQ(x)}{dx} = y = f(x)$ i prema tome po definiciji neodređenog integrala imamo

$$Q(x) = \int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

gde je $F(x)$ prvobitna funkcija za $f(x)$, kao izvod. Pošto je za $x = a$ površina $Q(a) = 0$, imamo $F(a) + C = 0$, odakle je C jednako $-F(a)$. Iz jednačine



Sl. 66 — Površina u Dekartovom sistemu koordinata

$$Q(x) = \int f(x)\, dx = F(x) - F(a)$$

imamo ovu definiciju određenog integrala:

Razlika vrednosti neodređenih integrala za dve vrednosti argumenta zove se određeni integral. Takav određeni integral je integral u smislu *Njutna i Lajbnica.*

Oznake:

$$\text{(XIV)}\quad Q = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

a i b su *granice određenog integrala*, a je *donja granica*, b — *gornja*, koja je u navedenom obrascu zamenila promenljivu granicu x. Crta sa označenim granicama zove se *znak dvostruke zamene.* Određeni integral u smislu Njutna — Lajbnica se odnosi na slučajeve kad je funkcija $f(x)$ integrabilna u smislu postojanja primitivne funkcije $F(x)$ čiji je izvod $f(x)$.

Druga definicija određenog integrala je osnovana na posmatranju određenog integrala kao granične vrednosti zbira beskrajno velikog broja beskrajno malih sabiraka, *elemenata određenog integrala.*

Na slici (sl. 67) je prikazano određivanje površine Q kao zajedničke granice zbira upisanih odnosno opisanih pravougaonika sa osnovom $\Delta x = \frac{1}{n}(b-a)$ i visinama

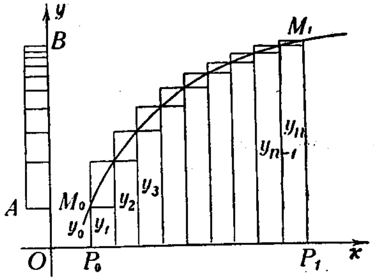
$y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ odnosno $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tj.

$$Q = \lim_{n\to\infty}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})\Delta x = \lim_{n\to\infty}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\Delta x.$$

Pri opštijem posmatranju može se na duži $P_0 P_1$, dužine $b-a$, staviti niz tačaka sa apscisama

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n<x_n=b,$$

koje dele duž na elemente (x_i-x_{i-1}). Na svakom elementu izaberimo neku proizvoljnu tačku sa apscisom ξ_i i obrazujmo zbir



Sl. 67 — Određeni integral kao zbir

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1}),$$

koji se zove *integralni zbir.* Označimo sa δ najveću vrednost od svih elemenata

$$x_i-x_{i-1},\ \text{tj.}\ x_i-x_{i-1}\leq\delta.$$

Ako je $f(x)$ funkcija ograničena na intervalu $[a, b]$, tj. $m<f(x)<M$, gde su m i M dva konačna broja, svaki od proizvoda $f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})$ teži nuli kad $\delta\to 0$.

Ako integralni zbir S_n, kad $n\to\infty$, ima određenu graničnu vrednost A, koja ne zavisi ni od načina podele intervala $[a, b]$ na elemente, ni od položaja tačaka ξ_i na svakom elementu, tj. kad je (u smislu principa $\varepsilon-\delta$)

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1}),$$

ta granična vrednost zove se određeni integral u granicama od a do b i izražava se obrascem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx.$$

Za funkciju na koju se može primeniti navedeni pojam određenog integrala se kaže da je *integrabilna u Koši — Rimanovom smislu,* a za integral je usvojen naziv *Rimanovog integrala* jer je Riemann (1826 — 1862) proučio uslove egzistencije tog integrala. Za ograničene i neprekidne funkcije možemo postaviti ove osobine Rimanovog integrala:

1. Određeni integral $\int_a^x f(x)\,dx$, kao funkcija gornje granice x, je konačna i neprekidna funkcija x.

2. Ako je $f(x)$ isto tako neprekidna funkcija, onda određeni integral, kao funkcija x, ima za svaku vrednost x izvod jednak $f(x)$.

3. Ako neprekidna funkcija $F(x)$ za svaku vrednost x ima određeni konačni izvod $f(x)$, onda je

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a).$$

To je *osnovni stav integralnog računa,* koji postavlja vezu između dve navedene definicije određenog integrala. Ovaj stav omogućuje izračunavanje određenog integrala čas pomoću neodređenog integrala, čas pomoću određivanja granične vrednosti integralnog zbira. Ali ipak navedene dve definicije određenog integrala nisu u potpunosti ekvivalentne, jer, s jedne strane, postoje funkcije koje su integrabilne u Rimanovom smislu, ali nema odgovarajuće primitivne funkcije, sa druge strane, postoje primitivne funkcije čiji izvodi nisu integrabilni u Rimanovom smislu.

4.51. Osnovne osobine određenih integrala

1. $\int_a^b A\,f(x)\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx$, ($A$ konstanta).

2. $\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]\,dx=\int_a^b f_1(x)\,dx+\int_a^b f_2(x)\,dx-\int_a^b f_3(x)\,dx$. 3. $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$.

4. $\int_a^a f(x)\,dx=0$. 5. $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(y)\,dy=$

$= \int_a^b f(z)\,dz$ (ne zavisi od oznake promenljive pod znakom integrala). 6. $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x), \frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(t)\,dt\right) = -f(x)$.

7. Ako je $f(-x) = f(x)$, $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Ako je $f(-x) = -f(x)$, $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$.

Teorema o srednjoj vrednosti u primeni na određeni integral. $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(\xi)$, gde je $f(x)$ neprekidna, ograničena i integrabilna funkcija u intervalu $[a, b]$, $a < \xi < b$.

Uopštavanje: $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx$, $f(x)$ i $\varphi(x)$ su neprekidne i $\varphi(x)$ ima stalan znak u intervalu integrala.

Zamena promenljive određenog integrala. $\int_a^b f(x)\,dx$, gde je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Stavimo $x = \varphi(t)$. Određujemo α i β iz jednačine $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Funkcija $\varphi(t)$ je neprekidna na intervalu $[\alpha, \beta]$ i ima neprekidan izvod $\varphi'(t)$. Tada se zamena vrši prema ovom obrascu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Obrazac za delimičnu integraciju određenog integrala:

$$\int_a^b u\,dv = |uv|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Diferenciranje i integrisanje određenog integrala po parametru. $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx$, gde su: α—parametar, $f(x, \alpha)$ neprekidna funkcija sa neprekidnim izvodom $f'_\alpha(x, \alpha)$ po parametru. Tada je neprekidan i izvod

$$F'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

U opštem slučaju kad su promenljive i granice imamo obrazac

$$F'(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx + f[b(\alpha), \alpha]\frac{db(\alpha)}{d\alpha} - f[a(\alpha), \alpha]\frac{da(\alpha)}{d\alpha}$$

Za slučaj integracije po parametru: $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\int_a^b f(x, \alpha)\,dx\right)d\alpha =$

$= \int_a^b\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha\right)dx$, ako je $f(x, \alpha)$ ograničena u celoj oblasti $a < x < b, \alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ i neprekidna u toj oblasti sa izuzetkom konačnog broja pravih $x =$ const. i $\alpha =$ const.

4.52. *Nepravi integrali*

Ako granice određenog integrala, jedna ili obadve, teže pozitivnoj ili negativnoj beskonačnosti, a sam integral pri tome teži određenoj graničnoj vrednosti, taj integral se zove *nepravi određeni integral.* Za takav integral imamo, npr. ovaj obrazac: $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$. Slični obrasci važe za integrale $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Pojam nepravog određenog integrala se odnosi takođe i na slučajeve kad za jednu ili obe granice ili za neku vrednost promenljive između granica integrala podintegralna funkcija $f(x)$ teži beskonačnosti. Tako, npr., ako $f(x)\to\infty$, kad $x\to b$ imamo ovu definiciju nepravog integrala

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad (\varepsilon > 0),$$

pod uslovom da napisana granična vrednost ima određenu vrednost.

Ako integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ konvergira, onda konvergira i integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ i tada se kaže za poslednji integral da je on *apsolutno konvergentni nepravi integral*. Ako isti, poslednji, integral konvergira, a integral modula ne konvergira, onda se integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *zove neapsolutno konvergentni nepravi integral*. To isto se odnosi i na druge nesopstvene integrale.

Ako za konačno b važi obrazac $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ i $\lim_{b\to\infty} F(b) = F(\infty)$, gde je $F(\infty)$ određena veličina, onda se nesopstveni integral računa prema obrascu.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} [F(b)-F(a)] = F(\infty)-F(a).$$

Slični obrasci se primenjuju i za druge neprave integrale, za koje postoji primitivna funkcija.

Za integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sa $f(c)\to\infty$, kad je $a<c<b$, imamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx\right].$$

Prema opštim uslovima prelaza na granične vrednosti granične vrednosti prvog i drugog integrala ne smeju da zavise od načina na koji ε_1 i ε_2 teži nuli. Ako taj uslov ne može biti ispunjen, od koristi je proučavati granice za $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$. Takva vrednost nepravog određenog integrala zove se *glavna vrednost* sa oznakom *V. p.* (Valeur principale), dakle je

$$V.p. \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right].$$

U vezi sa diferenciranjem i integrisanjem nesopstvenog integrala po parametru treba navesti ovu primedbu. Pri izračunavanju nepravih integrala učestvuje operacija prelaza na graničnu vrednost, koja se osniva na tzv. „ε-δ principu". Odgovarajući proces je *ravnomerno konvergentan*, ako počev od nekog N-tog koraka u tom beskonačnom procesu δ zavisi samo od ε i ne zavisi od reda koraka i vrednosti argumenta za koju se određuje granična vrednost.

Ravnomerno konvergentni nepravi integrali imaju ove osobine:

1. Ako integral $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ ravnomerno konvergira, on je neprekidna funkcija od α pri $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ pod uslovom da je $f(x,\alpha)$ neprekidna za $x \geqslant a$ i za α u navedenom intervalu.

2. Nepravi integral iz 1. može se integrisati:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)\,d\alpha.$$

3. Ako su funkcije $f(x,\alpha)$ i $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ neprekidne i nepravi integral $\int_a^{\infty} f(x,\alpha)\,dx$ konvergira, a integral $\int_a^{+\infty} \dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ konvergira ravnomerno, onda važi obrazac

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

4.53. Tablica određenih integrala

(m i n su prirodni brojevi, p, q, r—racionalni)

1. $\int_0^1 (1-x)^p\, x^{1-p}\,dx = \int_0^1 (1-x)^{1-p}\, x^p\,dx =$

$$= \frac{1}{2} p\pi\,(1-p)\operatorname{cosec} p\pi;\quad (p^2<1).$$

2. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-p-1}}{1+x^q}\,dx=\frac{\pi}{q}\operatorname{cosec}\frac{p\pi}{q}.$$

3. $$\int_0^1 \frac{x^p\,dx}{(1-x)^p}=\frac{p\pi}{\sin p\pi};\ (p^2<1).$$

4. $$\int_0^1 \frac{x^p\,dx}{(1-x)^{p+1}}=-\frac{\pi}{\sin p\pi};\ (p^2<1).$$

5. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx=\pi\operatorname{cotg}p\pi$$

6. $$\int_0^1 \frac{x^{-p}-x^p}{1-x}\,dx=\frac{1}{p}-\pi\operatorname{cotg}p\pi.$$

7. $$\int_0^1 \frac{(1-x)^{p-1}}{x^p}\,dx=\pi\operatorname{cosec}p\pi.$$

8. $$\int_0^1 \frac{x^{q-1}\,dx}{(1-x)^q\,(1+px)}=\frac{\pi}{(1+p)^q}\operatorname{cosec}q\pi.$$

9. $$\int_0^1 \frac{x^{q-1}\,dx}{(1-x)^q\,(x+p)}=\frac{p^{q-1}\pi}{(1+p)^q}\operatorname{cosec}q\pi.$$

10. $$\int_0^1 \frac{(1-x^n)\,dx}{(1+x)^{n+1}(1-x)}=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}.$$

11. $$\int_0^1 (1-\sqrt{x})^{p-1}\,dx=\frac{2}{p\,(p+1)}.$$

12. $$\int_0^1 \frac{dx}{(1-px)\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2\sqrt{p(1-p)}}\arcsin\sqrt{p}.$$

13. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+p^2x)(1-x)}}=\frac{2}{p}\operatorname{arc\,tg}p.$$

14. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-p^2x)(1-x)}}=\frac{1}{p}\lg\frac{1+p}{1-p}.$$

15. $$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^4)\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{8}.$$

16. $$\int_0^1 xe^{qx}\,dx=\frac{1}{q^2}[(q-1)e^q+1].$$

17. $$\int_0^1 \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}=\frac{e}{2}-1.$$

18. $$\int_0^1 \lg(q+px)\,dx=\frac{q+p}{p}\lg(q+p)-\frac{q}{p}\lg q-1.$$

19. $$\int_0^1 \lg x\lg(1-x)\,dx=2-\frac{\pi^2}{6}.$$

20. $$\int_0^1 x^{n-1}\lg(1-x)\,dx=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

21. $$\int_0^1 \lg x\lg(1+x)\,dx=2-\frac{\pi^2}{12}-2\lg 2.$$

22. $$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}\lg 2.$$

23. $\int_0^1 \frac{\lg x}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{8}$.

24. $\int_0^1 \frac{\lg x}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{\lg(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$.

25. $\int_0^1 \frac{\lg x}{1+x}\,dx = -\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$.

26. $\int_0^1 \lg(1-\sqrt{x})\,dx = -\frac{3}{2}$.

27. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\lg\frac{1}{x}}} = 2\int_0^1 \sqrt{\lg\frac{1}{x}}\,dx = \sqrt{\pi}$.

28. $\int_0^1 \operatorname{arc\,sin} px\,dx = \operatorname{arc\,sin} p + \frac{1}{p}\sqrt{1-p^2} - \frac{1}{p}$.

29. $\int_0^1 \operatorname{arc\,cos} px\,dx = \operatorname{arc\,cos} p + \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\sqrt{1-p^2}$.

30. $\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} px\,dx = \operatorname{arc\,tg} p - \frac{1}{2p}\lg(1+p^2)$.

31. $\int_0^1 \operatorname{arc\,cotg} px\,dx = \operatorname{arc\,cotg} p + \frac{1}{2p}\lg(1+p^2)$.

32 $\int_0^1 \operatorname{arc\,sin}(\sqrt{x})\,dx = \int_0^1 \operatorname{arc\,cos}(\sqrt{x})\,dx = \frac{\pi}{4}$.

33. $\int_0^\infty \frac{dx}{p^2+q^2x^2} = \frac{\pi}{2pq}$.

34. $\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x^m}\,dx = \frac{\pi}{m\sin\frac{n\pi}{m}}$; $(0<n<m)$.

35. $\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{p^2}{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2p}$; $(p \geqslant 0)$.

36. $\int_0^\infty x^n e^{-px}\,dx = \frac{n!}{p^{n+1}}$; $(p>0,\ n \geqslant 0)$.

37. $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-px^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{n!}{p^{n+1}}$; $(p>0)$.

38. $\int_0^\infty x^{2n} e^{-px^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n p^{n+0,5}}$; $(p>0)$.

39. $\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = 1-\lg 2$.

40. $\int_0^\infty e^{-px}\sin(qx+r)\,dx = \frac{1}{p^2+q^2}(q\cos r + p\sin r)$.

41. $\int_0^\infty e^{-px}\cos(qx+r)\,dx = \frac{1}{p^2+q^2}(p\cos r - q\sin r)$.

42. $\int_0^\infty e^{-px^2}\cos qx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{q}{4p}}$; $(p>0)$.

43. $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

44. $$\int_0^\infty \sin px \cos qx \frac{x\,dx}{r^2-x^2} = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\cos pr \cos qr; & (p>q). \\ -\dfrac{\pi}{4}\cos 2pr; & (p=q). \\ +\dfrac{\pi}{2}\cos pr \sin qr; & (p<q). \end{cases}$$

45. $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

46. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

47. $$\int_0^\infty \frac{\cos px - \cos qx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(q-p); \quad (p>0, \; q>0).$$

48. $$\int_0^\infty \lg(1+p^2x^2)\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q}\lg(1+pq).$$

49. $$\int_0^\infty \lg(p^2+x^2)\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q}\lg(p+q).$$

50. $$\int_0^\pi \lg(1-2p\cos x+p^2)\,dx = \begin{cases} 0; & (p^2<1). \\ 2\pi\lg p; & (p^2>1). \end{cases}$$

51. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arc\,tg}(p \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\lg(1+p).$$

52. $$\int_0^{\pi/2} \lg \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \lg \cos x\,dx = -\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\operatorname{tg} x} = -\frac{\pi}{2}\lg 2.$$

53. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}.$$

54. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

55. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(p^2\cos^2 x + q^2\sin^2 x)^n} = \frac{\pi}{2^n(n-1)!}\cdot\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{[2(n-k)-1]!!\,[2(k-1)-1]!!\binom{n-1}{n-k}p^{2(n-k)}\,q^{2(k-1)}\right\}}{p^{2n-1}\,q^{2n-1}}.\,^*$$

56. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(p^2\cos^2 x + q^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi(p^2+q^2)}{4p^3q^3}.$$

57. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \cos^{2m+1} x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}$$

58. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \cos^{2m} x\,dx = \frac{(2n-1)!!\,(2m-1)!!}{(2n+2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.\,^*$$

59. $$\int_0^\infty e^{-px}\cosh qx\,dx = \frac{p}{p^2-q^2}; \quad (p>0, \; p^2\neq q^2).$$

60. $$\int_0^\infty e^{-px}\sinh qx\,dx = \frac{q}{p^2-q^2}; \quad (p>0, \; p^2\neq q^2).$$

---

*) Znak $k!!$ (polufaktorijela) označava proizvod uzastopnih samo neparnih od 1 ili parnih od 2 do neparnog ili parnog broja k.

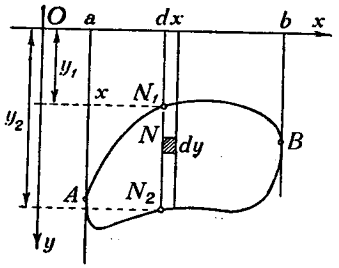
4.6. Višestruki integrali

Neka je u ravni Qxy data neka oblast Q ograničena konturom, zatvorenom krivom linijom, udubljenom prema posmatraču u oblasti. Podelimo tu oblast na elementarne površine q_i, od kojih svaka ima najveću tetivu manju od dužine δ, koju ćemo zvati merom elemenata. Neka su, pri prebrojavanju svih n elemenata oblasti, x_i, y_i koordinate tačke M_i koja pripada i-tom elementu. Jednoznačna i ograničena u svim tačkama oblasti funkcije $f(x, y)$ ima vrednost $f(x_i, y_i)$ u tački M_i.

Zbir

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, q_i,$$

proširen na sve elemente oblasti Q, je *dvodimenzioni integralni zbir* elemenata $f(x_i, y_i)\, q_i$ na oblasti Q.



Sl. 68 — Izračunavanje dvostrukog integrala

Pošto se uzme u obzir ono što je bilo navedeno (4.5.) u vezi sa definicijom jednodimenzionog integrala u Rimanovom smislu, neposredno se dobiva pojam dvostrukog integrala u ovom obliku

$$\iint_Q f(x, y)\, dq = \lim_{n\to\infty} S_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, q_i .$$

Pri podeli oblasti Q na elemente linijama paralelnim Ox i Oy osama se dobiva obrazac za *dvostruki integral u Dekartovim koordinatama*, iz kojeg se vidi i način izračunavanja integrala

$$\iint_Q f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx .$$

Prema ovom obrascu prvo se sabiraju elementi duž prave paralelne Oy osi na rastojanju x, smatranom kao stalno, i to u granicama od tačke N_1 sa $y_1(x)$ do N_2 sa $y_2(x)$. Kao rezultat te prve integracije dobiva se određena funkcija x-a, koja se odnosi na datu duž N_1N_2. Sabiranje elemenata sa svih takvih duži daje vrednost integrala proširenu na celokupno područje. Granice a i b po x odgovaraju tačkama dodira konture i pravih paralelnih sa Oy osom.

Na sličan način se formira trostruki integral proširen na određenu zapreminu:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{v_i \to 0} \Sigma f(x_i, y_i, z_i) \cdot v_i =$$

$$= \int_a^b \Big\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \Big[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \Big] dy \Big\} dx.$$

Prva integracija se vrši po pravoj, paralelnoj sa Oz osom za koju x i y imaju stalne vrednosti a granice za z su $z_1(x, y)$ i $z_2(x, y)$, kote tačaka preseka prave sa graničnom površinom $\varphi(x, y, z) = 0$ date zapremine, na koju je proširen trostruki integral. Zatim se sabiranje proširuje na površinu paralelnu sa Ozy ravni, vrši se integracija po y sa granicama $y_1(x)$ i $y_2(x)$ kao što se radi u slučaju dvostrukog integrala. Integracija se završava integracijom po x sa granicama a i b; to su apscise tačaka dodira ravni paralelne sa Oyz ravni i date površine $\varphi(x, y, z) = 0$.

Zamena promenljivih u dvostrukom i trostrukom integralu. Dve funkcije $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$, jednoznačne i neprekidne sa svojim neprekidnim prvim delimičnim izvorima u oblasti Q, na koju je proširen dvostruki integral

$$\iint_Q f(x, y)\, dx\, dy = \iint_Q f(M)\, dq,$$

određuju pomoću jednačina $x = \varphi_1(u, v)$, $y = \varphi_2(u, v)$ *transformaciju dvostrukog integrala na nove promenljive* u *i* v.

Prema novoj podeli površine Q linijama $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. element površine dq, kao površina paralelograma ima vrednost

$$dq = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}\, du\, dv, \text{ gde je } \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$$

determinanta koja se zove *jakobijan transformacije* i koja se kratko označava s J_2.

Prema tome imamo ovaj obrazac za transformaciju dvostrukog integrala

$$\iint_Q f(x, y)\, dx\, dy = \iint_Q f[\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)] \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}\, du\, dv.$$

Jednačina konture $\Phi(x, y) = 0$ prelazi u jednačinu

$$\Phi[\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)] = 0.$$

Analogan obrazac za trostruki integral glasi:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_V f[\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)]\, J_3\, du\, dv\, dw,$$

gde jakobijan J_3 ima vrednost

$$J_3 = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Jednačina $\Phi(x, y, z) = 0$ granične površine postaje

$$\Phi[\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)] = 0.$$

Glava peta

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA. PRIMENA INTEGRALNOG RAČUNA NA GEOMETRIJU

5.1. Određivanje krive u ravni u konačnom obliku

Analitički kriva u ravni se određuje na jedan od ovih načina:

1. Jednačinom u rešenom, eksplicitnom obliku $y = f(x)$ u Dekartovim ili u bilo kojim koordinatama koje određuju položaj tačke u ravni.

2. Jednačinom u nerešenom, implicitnom obliku $F(x, y) = 0$.

3. U parametarskom obliku $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$.

4. U specijalnom parametarskom obliku, kad je parametar s, dužina luka krive, tj. $x = f_1(s)$, $y = f_2(s)$.

5. U vektorskom obliku, kad je vektor položaja tačke M krive u odnosu na stalnu tačku dat kao vektor-funkcija parametra t, odnosno dužine luka s. Oznaka $\vec{r} = \vec{f}(t)$, odnosno $\vec{r} = \vec{f}(s)$.

Za što jednostavnije izlaganje pojmova diferencijalne geometrije upotrebimo vektorsku metodu i to u specijalnom obliku sa parametrom s.

Izvođenje obrazaca za sve ostale načine određivanja krive zahteva samo elementarne transformacije izvoda i diferencijala. U osnovi tih tansformacija leži izraz za tzv. *metričku formu* ds^2. U Dekartovim koordinatama $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Za proizvoljan parametar t imamo $ds^2 = \left[\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right] dt^2$.

Prema tome postavljanje konačne veze između t i s zahteva ovu kvadraturu:

$$s-s_0=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Za krivu u obliku $y=f(x)$ imamo: $s-s_o=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$

U polarnim koordinatama imamo: $s-s_0=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$

Za krivu čija je jednačina $F(x, y)=0$ imamo

$$s-s_0=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{F_y}\sqrt{F_x^2+F_y^2}\,dx,\text{ gde su } F_x=\frac{\partial F}{\partial x},\ F_y=\frac{\partial F}{\partial y}.$$

5.11. Diferencijalni elementi prvoga reda krive u ravni

Vektor koji zavisi od jedne ili više nezavisno promenljivih je *vektor-funkcija* tih promenljivih. Dekartove koordinate vektor-funkcije su skalarne funkcije istih promenljivih. Ako vektor-funkcija $\vec{r}$ zavisi samo od jedne promenljive, recimo t, *hodograf*, tj. geometrijsko mesto kraja vektora pri stalnom početku, je kriva linija. Ako se kraj vektor-funkcije uvek nalazi u istoj ravni, hodograf je kriva linija u ravni. Prema tome proučavanje krive u ravni i proučavanje ravnog hodografa vektor-funkcije su identični problemi. Oznaka:

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{f}(t).$$

Izvod vektor-funkcije $\vec{r}(t)$ nezavisno promenljive t je granična vrednost (ako postoji) količnika

$$\dot{r}_t=\frac{d}{dt}\vec{r}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Izvod $\dot{r}_t$ ima 1. pravac tangente na hodograf, 2. smer pomeranja tačke na hodografu za $\Delta t>0$ i 3. intenzitet — apsolutnu vrednost izvoda luka hodografa po nezavisno promenljivoj, tj. $\left|\frac{ds}{dt}\right|$.

Uvešćemo sad ovde ove uslovne oznake: tačka nad slovom označava izvod po parametru, označenom dole indeksom, npr., $\dot{r}_t=\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$, $\dot{x}_t=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}x(t)$. Za izvod po parametru s, oznaka parametra se, uslovno, izostavlja:

$$\dot{r}=\frac{d}{ds}\vec{r}(s),\quad \dot{x}=\frac{dx}{ds}=\frac{d}{ds}x(s).$$

Crta, kao i ranije, označava izvod funkcije $y(x)$ po nezavisno promenljivoj x, tj. $y'=\frac{dy}{dx}$, $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$.

U vezi sa primenama vektor-funkcije navedimo nekoliko potrebnih obrazaca za diferenciranje vektorskih izraza. Neka su $\vec{p}(t)$ i $\vec{q}(t)$ vektor-funkcije, $\varphi(t)$ skalarna funkcija nezavisno promenljive t, npr. vremena; $p(t)$ i $\vec{p}_0(t)$ su intenzitet i jedinični vektor vektora $\vec{p}$. Pravila diferenciranja:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}\pm\vec{q})=\frac{d}{dt}\vec{p}\pm\frac{d}{dt}\vec{q};\ \frac{d}{dt}(\varphi\vec{p})=\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}+\varphi\frac{d}{dt}\vec{p};$$

$$\frac{d}{dt}(p\vec{p}_0)=\frac{dp}{dt}\vec{p}_0+p\frac{d\vec{p}_0}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}\,\vec{q})=\left(\frac{d}{dt}\vec{p},\vec{q}\right)+\left(\vec{p},\frac{d\vec{q}}{dt}\right),\ \frac{d}{dt}[\vec{p},\vec{q}]=\left[\frac{d\vec{p}}{dt},\vec{q}\right]+\left[\vec{p},\frac{d\vec{q}}{dt}\right].$$

$$p=\text{const.}\ \therefore\ \left(\vec{p},\frac{d}{dt}\vec{p},\right)=0,\quad \left(\vec{p}_0,\frac{d}{dt}\vec{p}_0\right)=0.$$

Ako su x i y Dekartove koordinate vektor-funkcije $\vec{r}(t)$, Dekartove koordinate izvoda $\dot{r}_t$ su $\dot{x}_t,\dot{y}_t$; $d\vec{r}$ ima koordinate dx, dy. Metrička forma $ds^2=(d\vec{r})^2$. Zaključak $\dot{x}^2+\dot{y}^2=1$. Pre-

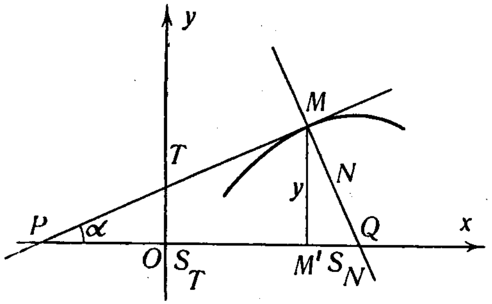
ma tome je, za $\vec{r}=\vec{r}(s)$, vektor $\dot{r}=\frac{d}{ds}\vec{r}(s)$ *jedinični vektor (ort) tangente*. Označimo ga sa $\vec{T}$.

Prema obliku u kojem je dat vektor položaja $\vec{r}$ kao vektor-funkcija, ugaoni koeficijent tangente na pravu u ravni ima ove vrednosti.

$$\operatorname{tg}\alpha=\dot{y}/\dot{x}=\dot{y}_t/\dot{x}_t=\frac{dy}{dx}=y'(x)=-F_x/F_y.$$

Jednačine tangente: $\eta-y=y'(x)(\xi-x)$, gde su x i y koordinate tačke M na krivoj, ξ, η—koordinate proizvoljne tačke P na tangenti. Druge forme: $F_x(\xi-x)+F_y(\eta-y)=0$; $(\xi-x)/\dot{x}_t=(\eta-y)/\dot{y}_t$. Vektorska forma: $[\vec{r}_P-\vec{r}_M, \dot{r}_M]=0$, gde je $\dot{r}_M$ vrednost vektorskog izvoda $\dot{r}$ (odnosno $\dot{r}_t$) za tačku krive M; u rešenom obliku: $\vec{r}_P=\vec{r}_M+p\dot{r}_M$, gde je p rastojanje između tačaka P i M.

Jednačine normale: $\eta-y=-\frac{1}{y'(x)}(\xi-x)$; $F_y(\xi-x)-$



Sl. 69 — Diferencijalni elementi prvoga reda krive linije u ravni. Slučaj Dekartovih koordinata

$-F_x(\eta-y)=0$; $(\xi-x)\dot{x}_t+(\eta-y)\dot{y}_t=0$. Vektorska forma $(\vec{r}_Q-\vec{r}_M, \dot{r}_M)=0$, gde je Q proizvoljna tačka na normali; u reše-

nom obliku: $r_Q=\vec{r}_M+q[\vec{v}\,\dot{r}_M]$, gde su: $=q$ rastojanje između tačaka Q i M, a $\vec{v}$ vektor upravan na ravan krive.

U Dekartovom koordinatnom sistemu za tangentu i normalu vezane su ove duži (sl. 69): $T=MP$, dužina tangente, $N=MQ$, dužina normale, $S_T=M'P$, subtangenta, $S_N=M'Q$, subnormala. Ove veličine imaju vrednosti:

$$T=y/\sin\alpha=(y/y')\sqrt{1+y'^2},\quad N=T\operatorname{tg}\alpha=y\sqrt{1+y'^2},$$
$$S_T=y\operatorname{cotg}\alpha=y/y',\quad S_N=y\operatorname{tg}\alpha=yy',$$

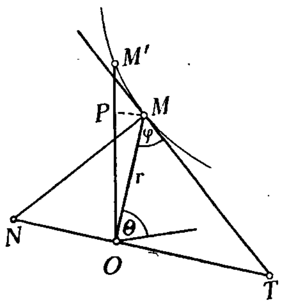
sa oznakom $y'=y'(x)=dy/dx$.

U polarnim koordinatama r, θ (sl. 70) položaj tangente MT je određen uglom $\varphi=\sphericalangle OMT$ čija je vrednost određena jednačinom: $\operatorname{tg}\varphi=\frac{rd\theta}{dr}=\frac{r}{r'}$. Dužine tangente, normale, subtangente i subnormale (sl. 70) imaju vrednosti:

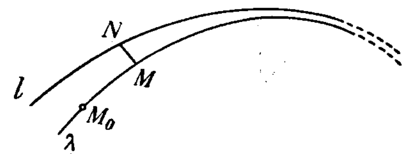
$$MT=(r/r')\sqrt{r^2+r'^2},\quad MN=\sqrt{r^2+r'^2},\quad OT=r^2/r',\quad ON=r'.$$

Metrička forma $ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$ se određuje iz trougla $MM'P$.

Asimptote. Kriva λ (sl 71) je *asimptota* krive l ako rastojanje MN tačke M krive λ od njoj najbliže tačke N druge krive teži nuli, kad se tačka M sve više udaljuje na svom putu po krivoj od tačke M_0. Smisao proučavanja takvog asimptotskog procesa



Sl. 70 — Diferencijalni elementi prvoga reda krive linije u ravni. Slučaj polarnih koordinata



Sl. 71 — Kriva i njena asimptota

je u tome da se proučavanje (i predstava) nekog komplikovanog procesa vezanog za krivu l zameni proučavanjem jednostav-

njeg procesa, vezanog za asimptotu, koja može biti i prava linija *(pravolinijska asimptota)*.

Određivanje pravolinijskih asimptota algebarskih krivih.

I. Asimptote paralelne koordinatnim osama. Neposredno iz jednačine $F(x, y)=0$ ili, posle rešavanja, iz jednačine $y=f(x)$ odnosno iz jednačine $x=\varphi(y)$, određuju se granične vrednosti $b=\lim_{x\to\infty} f(x)$, odnosno $a=\lim_{y\to\infty}\varphi(y)$. Ako te granične vrednosti postoje, u prvom slučaju prava čija je jednačina $y=b$ je asimptota paralelna sa Ox osom, u drugom jednačini $x=a$ odgovara asimptota paralelna Oy osi.

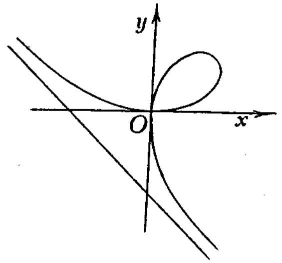
II. Asimptote kose prema koordinatnim osama $(y=ax+b)$.

Za određivanje kosih asimptota za krivu, čija je jednačina $y=f(x)$, treba odrediti a i b iz uslova

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0.$$

Ako asimptota postoji, prvo se određuje $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, a zatim $b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$.

Pravilo za određivanje asimptote $y=ax+b$ za algebarsku jednačinu u obliku $F(x, y)=0$. Stavimo $F(x, ax+b)=0$ i razvijamo po stepenima $x: a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$. Ako asimptota postoji, iz jednačina $a_0=0$, $a_1=0$ se određuju parametri a i b asimptote.



Sl. 72 — Dekartov list

Primer. Određivanje *asimptote Dekartovog lista* sa jednačinom:

$$x^3+y^3-3qxy=0,$$

gde je q konstanta (sl. 72). Stavimo $y=ax+b$ i izdvajamo prva dva člana polinoma po x:

$$(1+a^3)x^3+3a(ab-q)x^2+\cdots=0.$$

Rešavamo sistem jednačina $1+a^3=0$, $ab-q=0$. Pošto prva jednačina ima samo jedan realan koren $a=-1$ i tada imamo $b=-q$, Dekartov list ima samo jednu asimptotu sa jednačinom $y=-x-q$.

5.12. Diferencijalni elementi drugoga reda krive u ravni

Polaznim pojmom proučavanja diferencijalnih elemenata drugoga reda može da posluži *drugi vektorski izvod* vektora $\vec{r}$ položaja tačke M po luku s, tj. vektor $\ddot{r}=\frac{d^2}{ds^2}\vec{r}(s)$. Pošto je prvi izvod $\dot{r}$ vektor stalne, jedinične dužine, ort tangente $\vec{T}$, drugi izvod $\ddot{r}=\dot{T}$ ima pravac normale na krivu, smer na stranu skretanja pravca tangente i intenzitet graničnu vrednost $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta s}$, gde je ε *ugao skretanja* tangente na dužini Δs.

Prema tome možemo staviti:

$$\ddot{r}=\dot{T}=K\vec{N}=\vec{K},$$

gde je: $\dot{T}$ izvod orta tangente po luku, $\vec{N}$ ort normale na krivu u smeru skretanja tangente i K pozitivni skalar. Vektor $\vec{K}=K\vec{N}$ je *krivina (u vektorskom obliku)* krive u datoj tački. Skalar K, intenzitet vektora krivine, u običnom skalarnom izlaganju, isto tako se zove *krivina* krive u datoj tački. Na poznati način, prvo za kružnu liniju, a zatim i za proizvoljnu krivu liniju pomoću *oskulatornog kruga* (krug sa dodirom drugoga reda), skalar K se prikazuje u obliku $K=\frac{1}{R}$, gde je R tzv. *poluprečnik krivine* kruga, odnosno krive linije u datoj tački. Centar oskulatornog kruga zove se *centar krivine* date krive za datu tačku. Ako sa $\vec{r_c}$ označimo vektor položaja centra krivine, tačke C, ona se određuje iz vektorske jednačine

$$\vec{r_c}=\vec{r_M}+R\vec{N}=\vec{r_M}+\frac{1}{K}\vec{N},$$

gde je $\vec{r_M}$ vektor položaja date tačke M na krivoj.

Obrasci za jednačine krive u oblicima: 1. parametarskom, $x=x(t), y=y(t)$; 2. parametarskom sa parametrom s, tj. $x=x(s), y=y(s)$; 3. $y=f(x)$; 4. $F(x,y)=0$; 5. u polarnim koordinatama, $r=r(\theta)$.

1. $R=\dfrac{(\dot{x}_t^2+\dot{y}_t^2)^{3/2}}{\dot{x}_t\ddot{y}_t-\ddot{x}_t\dot{y}_t}$, $\quad x_c=x-\dfrac{\dot{x}_t^2+\dot{y}_t^2}{\dot{x}_t\ddot{y}_t-\ddot{x}_t\dot{y}_t}\dot{y}_t$,

$$y_c=y+\frac{\dot{x}_t^2+\dot{y}_t^2}{\dot{x}_t\ddot{y}_t-\ddot{x}_t\dot{y}_t}\dot{x}_t .$$

2. $R=\dot{x}/\ddot{y}=-\dot{y}/\ddot{x}$, $x_c=x-\dot{x}\dot{y}/\ddot{y}$, $y_c=y+\dot{x}\dot{y}/\ddot{x}$.

3. $R=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, $\quad x_c=x-\dfrac{1+y'^2}{y''}y'$, $y_c=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}$.

4. $R=-\dfrac{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}{F_y^2F_{xx}-2F_xF_yF_{xy}+F_x^2F_{yy}}$,

$$x_c=x+R\frac{F_x}{(F_x^2+F_y^2)^{1/2}},\quad y_c=y+R\frac{F_y}{(F_x^2+F_y^2)^{\frac{1}{2}}} .$$

5. $R=\dfrac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}$.

Prirodna jednačina krive u ravni. Posmatranje geometrijskog objekta bez obzira na njegov položaj u prostoru je *prirodno posmatranje.* Za prirodno određivanje krive u ravni služi tzv. *prirodna jednačina krive u ravni*: $F(R, s)=0$ ili $R=f(s)$ koja postavlja funkcionalnu vezu između poluprečnika krivine R, ili krivine K, i dužine luka s.

Prirodna jednačina: 1. prave, $K=0$ ili $R=\infty$; 2. kružne linije $R=a$, gde je a konstanta; 3. logaritamske spirale, $R=ms$, gde je m konstanta; 4. cikloide $R^2+s^2=16a^2$, gde je a konstanta; 5. lančanice $R=a+\dfrac{s^2}{a}$.

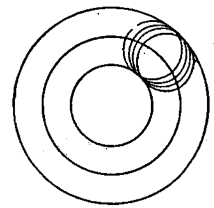
Teme krive. Obična tačka krive za koju poluprečnik krivine ima ekstremnu vrednost (max. ili min.) je *teme krive.* Kriva „u blizini" normale na krivu u temenu je simetrična u odnosu na tu normalu. Iz prirodne jednačine krive $R=f(s)$ za teme imamo uslov $\dfrac{dR}{ds}=f'(s)=0$ sa dopunskim uslovima za max. odnosno min.

Porodica krivih. Jednačina $F(x, y; c)=0$ u koju sem promenljivih koordinata x, y, ulazi još i parametar c, koji se može takođe menjati, određuje niz pojedinih krivih za diskretne vrednosti parametra c ili neprekidnu množinu takvih linija, kad parametar c uzima neprekidne vrednosti. Takva množina krivih zove se *porodica krivih sa jednim parametrom.*

Ako se sa svakoj krivoj porodice može odrediti granični položaj presečne tačke te krive sa beskrajno bliskom krivom te porodice, koordinate takve presečne tačke moraju zadovoljavati ove jednačine: $F(x, y;c)=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial c}=0$. Ova presečna tačka zove se *karakteristična tačka* na datoj krivoj porodice. Označimo je sa H. Takvih tačaka može biti i više. Geometrijsko mesto tačaka H, u opštem slučaju, je kriva u ravni. Ta kriva može biti ili *obvojnica (anvelopa)* krivih date porodice ili g. m. singularnih tačaka tih krivih. U slučaju anvelope tangenta na anvelopu u svakoj karakterističnoj tački je u isto vreme i tangenta na odgovarajuću krivu porodice.

Primer. Porodica krivih je data jednačinom kružnih linija $(x-r\cos c)^2+(y-r\sin c)^2=\rho^2$ sa centrom u promenljivoj tački sa koordinatama $x_c=r\cos c$, $y_c=r\sin c$, gde je c promenljivi parametar. Posle diferenciranja po c dolazimo do jednačine $x\sin c=y\cos c$, koja zajedno sa jednačinom $\sin^2 c+\cos^2 c=1$ daje:

$$\sin c=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos c=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$



Sl. 73 — Porodica kružnih linija

Ako te vrednosti uvrstimo u jednačinu krive porodice dobićemo jednačinu

$$(\sqrt{x^2+y^2}-r)^2=\rho^2$$

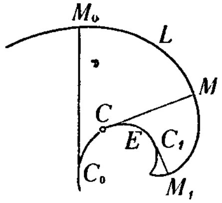
iz koje imamo dve jednačine:

$$x^2+y^2=(r+\rho)^2,\quad x^2+y^2=(r-\rho)^2.$$

Prva izražava obvojnicu, koja obuhvata spolja promenljive krugove, a druga koja dodiruje sve krugove unutra (sl. 73).

Evoluta. — Evoluta krive u ravni je geometrijsko mesto centara krivine te krive.

Pošto smo izveli u raznim oblicima jednačine za određivanje koordinata x_c, y_c centra krivine, lako je napisati jednačine evolute u parametarskom obliku. Tako, u Dekartovim koordinatama sa jednačinom krive u obliku $y=f(x)$ imamo *jednačine evolute*



Sl. 74 — Evoluta i evolventa

$$x_c = x - \frac{1+y'^2}{y''} y', \quad y_c = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

u parametarskom obliku sa parametrom x.

Osobine evolute: 1. Normala date krive je tangenta na evolutu. 2. Element dužine luka s_c evolute jednak je diferencijalu poluprečnika krivine, tj. $|ds_c| = |dR|$. Na slici (sl. 74) je sa L označena data kriva, a sa E njena evoluta.

Evolventa. Kriva L prema svojoj evoluti E zove se *evolventa* krive E.

Odredili smo evolutu, krivu E, prema datoj krivoj L, evolventi. Neka je sad, obrnuto, data kriva E, evoluta, i treba odrediti krivu L, evolventu.

Krivu E uzmimo u datom vektorskom obliku: $\vec{r}_c = \vec{r}_c\ (s_c)$, gde je s_c luk krive E od tačke C_0 sa lukom s_{co}. Za tačku M evolvente važi jednačina:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_c + \overrightarrow{CM}.$$

Vektor $\overrightarrow{CM}$ ima pravac tangente na krivu E u tački C. Označimo jedinični vektor te tangente sa $\vec{T}_c$; on ima vrednost $\dfrac{d\vec{r}_c}{ds_c}$

Intenzitet vektora $\overrightarrow{CM}$ jednak je intenzitetu vektora $\overrightarrow{C_oM_o}$, koji označimo sa a, smanjenom za dužinu luka $s_c - s_{co}$. Prema tome definitivno imamo ovu vektorsku jednačinu evolvente

$$\vec{r}_M = \vec{r}_c - (s_c - a)\vec{T}_c.$$

Ovoj vektorskoj jednačini odgovaraju dve skalarne jednačine evolvente

$$x_M = x_c - (s_c - s_{co}) \frac{dx_c}{ds_c}, \quad y_M = y_c - (s_c - s_{co}) \frac{dy_c}{ds_c}.$$

Desne strane tih jednačina su funkcije parametra s_c, luka date krive E.

U vezi sa proizvoljnošću konstante s_{co} može biti više evolvenata za istu datu krivu E, to su paralelne krive; rastojanje po normalama izmedju tih krivih za date konstante s_{co} ostaje isto.

Primer. Evolventa kruga. Jednačina kruga je data u obliku $x_c = a\cos t, y_c = a \sin t$, gde je $t = s_c/a$. Pošto je $\dot{x}_c = -a \sin t$, $\dot{y}_c = a \cos t$, jednačine evolvente (za $s_{co} = 0$) izgledaju ovako: $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$. Mesto slike preporučujemo namotati konac na neki valjak i na kraj konca nadovezati olovku; pri razmotavanju oštrica olovke crtaće evolventu kruga.

Trajektorije porodice krivih. Trajektorija porodice krivih sa jednim parametrom je kriva koja seče sve krive porodice pod datim uglom ili po kakvom drugom pravilu.

Trajektorije sa datim uglom su *izogonalne trajektorije*. Ako porodicu krivih odredjuje jednačina $F(x,y,c) = 0$, ugaoni koeficijent tangente na svaku krivu u svakoj tački ima vrednost $-\dfrac{\partial F}{\partial x} \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y} = k(x,y,c)$. Sa druge strane, ako jednačinu trajektorije uzmemo u obliku $y=f(x)$, ugaoni koeficijent tangente na ovu krivu ima vrednost $y' = f'(x)$. Najzad, ako sa m označimo tangens stalnog ugla izmedju navedenih tangenata, onda ćemo prema obrascu za tangens razlike uglova dobiti ovu diferencijalnu jednačinu izogonalne trajektorije: $(1-mk)y' - m - k = 0$, pri čemu iz te jednačine treba eliminisati parametar c pomoću jednačine $F(x, y, c) = 0$.

Trajektorije sa pravim uglom su *ortogonalne trajektorije*. Ili neposredno iz uslova ortogonalnosti $ky' = -1$ ili iz prethodne jednačine, $m \to \infty$, imamo ovu diferencijalnu jednačinu ortogonalne trajektorije $y' \dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ sa dopunskom jednačinom $F(x, y, c) = 0$ za eliminisanje parametra c.

Primetimo da je ortogonalna trajektorija porodice tangenata na evoluti evolventa.

5.2. Kriva u prostoru

Kriva, čije sve tačke ne možemo smestiti u jednu istu ravan, zove se *prostorna kriva*. I prostorna kriva može se

smatrati kao hodograf vektor-funkcije jedne nezavisno promenljive. npr. t. Prema tome vektorska jedačina $\vec{r} = \vec{f}(t)$ odredjuje prostornu krivu, ako svi krajevi tog vektora nisu komplanarni. U Dekartovim koordinatama skalarne jednačine prostorne krive jesu: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

Prostorna kriva može se smatrati i kao presek dve površine sa jednačinama: $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$. Za prostornu krivu nijedna od tih površina ne sme biti ravan.

Jednačine $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, u opštem slučaju, takođe odredjuju prostornu krivu kao presek dve cilindarske površine, prve sa izvodnicom paralelnom Oz osi i vodiljom krivom u ravni Oxy, i druge sa izvodnicom paralelnom Oy osi i vodiljom u ravni Ozx. Može se konstruisati i treća cilindarska površina sa izvodnicom paralelnom Cx osi i vodiljom konstruisanom prostornom krivom ili krivom u ravni Oyz, čija se jednačina dobiva posle eliminisanja promenljive x iz date dve jednačine.

Osnovom za proučavanje prostorne krive može da posluži vektorska jednačina sa parametrom s, dužinom luka prostorne krive.

Za postavljanje konačne veze između parametra s i drugih promenljivih za određivanje položaja tačke na krivoj treba iskoristiti izraz metričke forme za odgovarajuće koordinate. U Dekartovim, polarno-cilindarskim i sfernim koordinatama, metričke forme imaju oblik

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad ds^2 = r^2\,d\theta^2 + dr^2 + dz^2,$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2 + \rho^2 \cos^2\varphi\,d\psi^2.$$

Prema tome se konačna veza između parametra s i proizvoljnog parametra t za parametarske jednačine krive u prostoru u Dekartovim koordinatama izražava ovako

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt.$$

Za krivu sa jednačinama $y = y(x)$, $z = z(x)$ ovaj obrazac daje

$$s - s_0 = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx.$$

5.21. *Diferencijalni elementi krive u prostoru*

Tangenta. Ako je kriva u prostoru određena kao hodograf vektor-funkcije parametra s, tj. vektorskom jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(s)$ kojoj odgovaraju ove skalarne jednačine

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

vektorski izvod tog vektora po parametru s, tj. $\dot{r} = \frac{d}{ds}\vec{r}(s)$, je vektor jedinične dužine sa pravcem tangente na krivu i smerom pomeranja tačke krive M kad parametar s raste. Koordinate ovog vektora imaju vrednosti: $\dot{x} = \frac{dx}{ds} = \cos\alpha$,

$$\dot{y} = \cos\beta, \quad \dot{z} = \cos\gamma, \quad \text{gde su } \alpha, \beta, \gamma$$

uglovi tangente sa koordinatnim osama. Označimo: $\dot{r} = \vec{T}$.

Jednačine tangente: vektorska forma $[\vec{r}_P - \vec{r}_M, \dot{r}_M] = 0$ sa istim oznakama kao i u slučaju ravne krive; parametarska forma $\frac{\xi - x}{\dot{x}_t(t)} = \frac{\eta - y}{\dot{y}_t(t)} = \frac{\zeta - z}{\dot{z}_t(t)}$; za jednačine $y = y(x)$, $z = z(x)$ ove jednačine $\frac{\xi - x}{1} = \frac{\eta - y}{y'(x)} = \frac{\zeta - z}{z'(x)}$; najzad, za dve jednačine

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0$$

jednačine tangente su $\frac{\xi - x}{\Delta_1} = \frac{\eta - y}{\Delta_2} = \frac{\zeta - z}{\Delta_3}$, gde su

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}.$$

Normalna ravan. Ravan normalna na tangentnu u tački dodira je *normalna ravan na krivu* u datoj tački krive.

Jednačine normalne ravni: vektorska forma

$$(\vec{r}_P - \vec{r}_M, \dot{r}_M) = 0;$$

skalarna forma —

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$

$$(\xi - x)\,\Delta_1 + (\eta - y)\,\Delta_2 + (\zeta - z)\,\Delta_3 = 0,$$

odnosno

$$\xi - x + (\eta - y)\, y' + (\zeta - z)\, z' = 0.$$

Svaka prava u normalnoj ravni kroz tačku krive je *normala na krivu*.

Glavna normala, oskulatorna ravan, binormala i rektifikaciona ravan. Prirodni trijedar.

Drugi vektorski izvod

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{ds^2}\vec{r}(s) = \frac{d}{ds}\dot{\vec{r}} = \frac{d}{ds}\vec{T}(s) = \dot{\vec{T}},$$

kao vektorski izvod vektora stalnog intenziteta ima pravac normale na vektoru $\vec{T}$ i, znači, određuje u normalnoj ravni određenu normalu na krivu; ta normala se zove *glavna normala* krive u datoj tački; označimo jedinični vektor glavne normale sa $\vec{N}$. Prema tome je $\ddot{\vec{r}} = K\vec{N}$, gde je K pozitivni skalar. I ovde se vektor $K\vec{N} = \vec{K}$ zove *vektorska krivina* krive linije u prostoru.

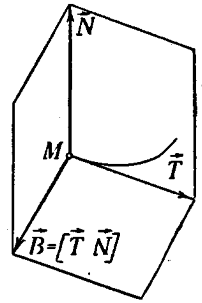
Ravan u kojoj se nalaze tangenta i glavna normala, $\vec{T}$ i $\vec{N}$, *zove se oskulatorna ravan* krive u datoj tački. Tangenta je granični položaj prave koja prolazi kroz dve beskrajno bliske tačke M i M' krive, a oskulatorna ravan je granični položaj ravni koja prolazi kroz tri beskrajno bliske tačke M, M', M'', recimo, na istim lučnim rastojanjima $MM' = M'M'' = \Delta s$, kad $\Delta s \to 0$.

Normala na oskulatornoj ravni se zove *binormala*. Označimo jedinični vektor binormale sa $\vec{B}$, a smer odredimo tako da je $\vec{B} = [\vec{T}\vec{N}]$, pri čemu smer tog vektorskog proizvoda izaberemo prema izabranoj orijentaciji koordinatnog trijedra: pošto smo izabrali desni trijedar, i ova tri jedinična vektora treba da obrazuju desni trijedar osa. Taj trijedar osa se zove *prirodni trijedar* date krive za datu tačku. Prva ravan tog trijedra je normalna ravan, druga — oskulatorna ravan, a treća ravan, u kojoj se nalaze tangenta i binormala, zove se *rektifikaciona ravan*, ona stoji upravno na glavnoj normali (sl. 75).

Za proučavanje promene položaja oskulatorne ravni uzima se vektorski izvod $\dot{B}$ od jediničnog vektora binormale upravne na oskulatornoj ravni. Iz jednačine $\vec{B} = [\vec{T}\vec{N}]$ posle diferenciranja

dolazimo do jednačine da je $\dot{B} = Z\vec{N}$, gde je Z algebarska vrednost vektora $\dot{B}$ prema vektoru $\vec{N}$. Vektor $\vec{Z} = Z\vec{N}$ zove se *vektorsko zavijanje (torzija)* krive u prostoru. Tom vektoru odgovara skalar Z koji takodje ima naziv *zavijanja* (*torzija* kao skalar). Posle proučavanja trećeg vektorskog izvoda $\dddot{r} = \frac{d^3}{ds^3}\vec{r}(s)$ se dolazi do ovog obrasca za torziju

$$Z = \frac{1}{\ddot{r}^2}\left(\dot{r}\left[\ddot{r}\ \dddot{r}\right]\right).$$



Sl. 75 — Prirodni trijedar

Sad možemo navesti osnovne obrasce iz teorije prostorne krive u vektorskoj i skalarnoj formi.

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \qquad ix + jy + kz$$

$$\dot{r} = \frac{d}{ds}\vec{r}(s) = \vec{T} \qquad i\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z}; \qquad \vec{T}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2}{ds^2}\vec{r}(s) = \dot{T} = K\vec{N} \qquad K^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 = \frac{1}{R^2};$$

$$\vec{N} = \frac{1}{K}\ddot{r}; \qquad \vec{N}(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1).$$

$$\dddot{r} = \frac{d^3}{ds^3}\vec{r}(s) = -K^2\vec{T} + \frac{dK}{ds}\vec{N} + KZ\vec{B}; \qquad \vec{B} = [\vec{T}\vec{N}];$$

$$Z = \frac{1}{\ddot{r}^2}\left(\dot{r}\left[\ddot{r}\ \dddot{r}\right]\right); \qquad \vec{B}(\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2).$$

Za kosinuse imamo vrednosti: $\cos\alpha = \dot{x}, \ldots, \ldots;$

$$\cos\alpha_1 = \ddot{x}/K, \ldots, \ldots; \quad \cos\alpha_2 = \frac{1}{K}(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}), \ldots, \ldots$$

$$Z = \frac{1}{K^2}\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}. \quad \dot{B} = -Z\vec{N}; \quad \dot{N} = -K\vec{T} + Z\vec{B}.$$

Iz dva poslednja obrasca zaključujemo da dva vektora sa istom algebarskom vrednošću Z, jedan u pravcu binormale sa napadnom tačkom u kraju vektora $\vec{N}$, a drugi u smeru suprotnom vektoru $\vec{N}$ sa napadnom tačkom u kraju vektora $\vec{B}$, obrću prirodni trijedar oko ose jediničnog vektora $\vec{T}$. Iz tog neposredno sleduje da od znaka veličine Z zavisi smer obrtanja oskulatorne ravni.

Tri izvedene vektorske jednačine

$$\dot{T} = K\vec{N}, \quad \dot{N} = -K\vec{T} + Z\vec{B}, \quad \dot{B} = -Z\vec{N}$$

su *prirodne diferencijalne jednačine krive u prostoru*. Kriva se može konstruisati, ako su date skalarne funkcije K i Z, krivina i zavijanje, u funkciji dužine luka s. Pri tome treba da bude dat i početni položaj osa prirodnog trijedra.

Prethodnim vektorskim jednačinama odgovaraju devet skalarnih jednačina koje se zovu *Freneove jednačine* (F. Frenet, 1816 — 1900).

Vektorima $\dot{T}$ i $\dot{B}$ odgovaraju skalari: krivina K sa *poluprečnikom krivine* $R = \frac{1}{K}$ i zavijanje Z sa *poluprečnikom zavijanja* $\frac{1}{|Z|}$. Vektoru $\dot{N}$ odgovara vektor sa dve komponente u pravcima $\vec{T}$ i $\vec{B}$. Zbir tih komponenata je *totalna krivina* krive u prostoru. Označimo nju sa $\vec{\Pi}$. Veličina $P = \frac{1}{|\vec{\Pi}|}$ je *poluprečnik totalne krivine*. Za dve krivine i zavijanje važi ova *Lankreova* (*Lancret*) *teorema*: $\frac{1}{P^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{Z^2}$.

Navedimo još matričnu jednačinu (str. 205), koja odgovara Freneovim jednačinama:

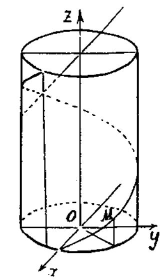
$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & Z \\ 0 & -Z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix},$$

gde treba primeniti pravilo o *množenju matrica* (obrazovati skalarne proizvode vrsta leve matrice i stubaca desne matrice).

U narednoj tablici dajemo jednačine tri prave i tri ravni koje učestvuju u prirodnom trijedru i to u vektorskom i skalarnom obliku. Oznake su iste kao i u slučaju krive u ravni.

Tangenta	$\vec{r}_P = \vec{r}_M + p\dot{r}_M$,	$\frac{\xi - x}{\dot{x}} = \frac{\eta - y}{\dot{y}} = \frac{\zeta - z}{\dot{z}}$,
Normalna ravan	$(\vec{r}_P - \vec{r}_M, \dot{r}_M) = 0$,	$\dot{x}(\xi - x) + \dot{y}(\eta - y) + \dot{z}(\zeta - z) = 0$,
Glavna normala	$\vec{r}_P = \vec{r}_M + p\ddot{r}_M$,	$\frac{\xi - x}{\ddot{x}} = \frac{\eta - y}{\ddot{y}} = \frac{\zeta - z}{\ddot{z}}$,
Rektifikaciona ravan	$(\vec{r}_P - \vec{r}_M, \ddot{r}_M) = 0$,	$\ddot{x}(\xi - x) + \ddot{y}(\eta - y) + \ddot{z}(\zeta - z) = 0$,
Binormala	$\vec{r}_P = \vec{r}_M + p[\dot{r}_M, \ddot{r}]$,	$\frac{\xi - x}{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y}{\begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}$,
Oskulatorna ravan	$(\vec{r}_P - \vec{r}_M, [\dot{r}_M, \ddot{r}]) = 0$.	$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0$.

Zavojnica. Uzmimo neki običan, tehnički dobro izrađen, cilindarski *zavrtanj* sa njegovim *navrtnjem* na njemu. Označimo sa A neku tačku navrtnja van njegove ose. Izaberimo desni koordinatni sistem $Oxyz$ (sl. 76) i namestimo u njemu zavrtanj sa navrtnjem tako da se njegova osa nađe na Oz osi, a tačka A navrtnja na Ox osi. Neka je zavrtanj takav da se pri obrtanju navrtnja u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku u ravni Oxy tačka A udaljuje od Oxy ravni u smeru Oz ose (desni zavrtanj).



Sl. 76 — Zavojnica

Kriva linija u prostoru, koju opisuje stalna tačka (A) navrtnja koji se kreće po zavrtnju, zove se *zavojnica*. U slučaju kad je zavrtanj levi, naziv se obavezno dopunjuje: *leva zavojnica*.

Označimo sa M proizvoljan položaj tačke A na zavojnici kad se ta tačka kreće zajedno sa navrtnjem. Koordinate tačke M mogu se izraziti ovako:

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = h\,\theta,$$

gde su: a — rastojanje tačke A od ose zavrtnja, a prema tome i poluprečnik cilindarske površine na kojoj se nalazi tačka M, h — pomeranje tačke M u pravcu Oz ose, kad ugao θ poraste za jedan radijan. Napisane jednačine su parametarske jednačine zavojnice u polarno-cilindarskim koordinatama. Mesto koeficijenta proporcionalnosti h često se zavojnica karakteriše i veličinom $H=2\pi h$, koja se zove *hod zavojnice*, — to je rastojanje između dva uzastopna zavoja.

Jednačine zavojnice u Dekartovim koordinatama su:

$$x^2+y^2=a^2, \quad y=x\,\mathrm{tg}\frac{z}{h},$$

kao presek površine kružnog valjka i tzv. *pravog helikoida*, tj. geometrijskog mesta prave, koja se ravnomerno obrće oko stalne tačke u ravni, a sama ravan se kreće translatorno isto ravnomerno u pravcu normale na tu ravan.

Pošto je

$$ds^2=(a^2+h^2)\,d\theta^2=l^2\,d\theta^2, \text{ gde } l=\sqrt{a^2+h^2}, \text{ imamo } \theta=\frac{s}{l}$$

i jednačine zavojnice sa parametrom s su:

$$x=a\cos\frac{s}{l}, \quad y=a\sin\frac{s}{l}, \quad z=\frac{h}{l}s.$$

Kosinusi tangente:

$$\cos\alpha=-\frac{a}{l}\sin\frac{s}{l}, \quad \cos\beta=\frac{a}{l}\cos\frac{s}{l}, \cos\gamma=\frac{h}{l};$$

Kosinusi glavne normale:

$$\cos\alpha_1=-\cos\frac{s}{l}, \quad \cos\beta_1=-\sin\frac{s}{l}, \cos\gamma_1=0;$$

Kosinusi binormale:

$$\cos\alpha_2=\frac{h}{l}\sin\frac{s}{l}, \quad \cos\beta_2=-\frac{h}{l}\cos\frac{s}{l}, \quad \cos\gamma_2=\frac{a}{l}.$$

Krivina:

$$K=\frac{a}{l^2}=\frac{\cos^2\varphi}{a}, \text{ zavijanje: } Z=\frac{h}{l^2}=\frac{\sin^2\varphi}{h},$$

gde je φ ugao između tangente i ravni Oxy, tzv. *ugao penjanja*. $\mathrm{tg}\,\varphi=h/a$.

Iz napisanih jednačina mogu se izvesti ove osobine zavojnice.

1. Projekcije zavojnice: na ravan Oxy — kružna linija, na ravan Oxz — sinusoida, na ravan Oyz — kosinusoida.

2. Na cilindarskoj površini razvijenoj u ravan zavojnica se pretvara u pravu liniju. Prema tome je zavojnica geodezijska linija na površini cilindra.

3. Krivina i zavijanje zavojnice su konstantne u svakoj tački krive.

4. Dve zavojnice sa istim parametrima a i h mogu kliziti jedna po drugoj, desna po desnoj ($h>0$) i leva po levoj ($h<0$).

Darboux-ov vektor. Gaston Darboux (1842—1917) je uveo vektor $\vec{\Omega}=K\vec{B}+Z\vec{T}$ koji, posle vektorskog množenja zdesna jediničnim vektorom bilo koje ose prirodnog trijedra daje izvod tog jediničnog vektora po s. Prema tom pravilu imamo Freneove jednačine:

$$\dot{T}=[\vec{\Omega}\vec{T}]=K[\vec{B}\vec{T}]=K\vec{N},$$

$$\dot{N}=[\vec{\Omega}\vec{N}]=K[\vec{B}\vec{N}]+Z[\vec{T}\vec{N}]=-K\vec{T}+Z\vec{B},$$

$$\dot{B}=[\vec{\Omega}\vec{B}]=Z[\vec{T}\vec{B}]=-Z\vec{N}.$$

pri čemu izvođenje tih jednačina traži poznavanje samo jednog vektora $\vec{\Omega}$.

5.3. Teorija površine

Jednačine površine u konačnom obliku. 1. Rešeni ili eksplicitni oblik: $y=f(x, y)$, pri tome se pretpostavlja, da su funkcija $f(x, y)$ i njeni delimični izvodi, po potrebi, prvog i višega reda neprekidne funkcije u onoj oblasti o kojoj se govori i koja se smatra kao *regularna oblast*.

2. Implicitni oblik: $F(x, y, z)=0$. Isti uslovi za tačke regularne oblasti, sa dopunom da svi delimični izvodi F_x, F_y, F_z ne mogu da budu jednaki nuli.

3. Parametarski oblik sa jednačinama: $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, gde su u i v tzv. *Gauss-ovi parametri* površine.

4. Vektorski oblik: $\vec{r}(u, v)=ix(u, v)+jy(u, v)+kz(u, v)$.

Površina je regularna u određenoj oblasti, ako su funkcije $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ neprekidne sa svojim delimičnim izvodima $x_u=\frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v=\frac{\partial x}{\partial v}$, ..., ... i ako je funkcionalna matrica $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ ranga dva, tj. da sve determinante drugoga reda sastavljene od ove matrice, napr., $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$, ne mogu biti jednake nuli.

Kroz svaku tačku površine sa $u=c_1$, $v=c_2$ prolaze dve linije čije su vektorske jednačine: $\vec{r}=\vec{r}(c_1, v)$, $\vec{r}=\vec{r}(u, c_2)$. Vrednosti u i v su *krivolinijske koordinate tačke na površini*, a svaka linija sa konstantnom jednom koordinatom je *koordinatna linija na površini*. Skup koordinatnih linija čini *mrežu koordinatnih linija*. *Mreža je regularna* u određenoj oblasti površine, ako kroz svaku tačku oblasti prolaze samo dve koordinatne linije koje se ne dodiruju. *Mreža* je *ortogonalna* ako se u svakoj tački oblasti koordinatne linije seku pod pravim uglom.

Sa vektorskog gledišta svaka površina je *hodograf vektor-funkcije* dve nezavisno promenljive, tj. $\vec{r}_M=\vec{f}(u, v)$. Koordinatne linije su *delimični hodografi* vektor-funkcije dve promenljive, kad se menja samo jedna nezavisno promenljiva. Kriva na datoj površini se postavlja funkcionalnom vezom, recimo, u obliku $\varphi(u, v)=0$, između koordinata tačke na površini. Ako funkcionalnu vezu između u i v postavimo u parametarskom obliku $u=u(t)$, $v=v(t)$, jednačinu krive na površini u vektorskom obliku možemo izraziti ovako

$$\vec{r}_M=\vec{f}\,[u(t), v(t)].$$

Metrička forma površine.

$$ds^2=(d\vec{r})^2=(\dot{r}_u\,du+\dot{r}_v\,dv)^2=dx^2+dy^2+dz^2=$$
$$=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

gde su

$$E=(\dot{r}_u)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

$$F=(\dot{r}_u\dot{r}_v)=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G=(\dot{r}_v)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Metrička forma površine $E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ zove se i *prva osnovna kvadratna forma površine*, ona je definitna pozitivna forma sa diskriminantom $H^2=EG-F^2>0$. Za slučaj $z=f(x, y)$ imamo $E=1+p^2$, $F=pq$, $G=1+q^2$, $H^2=1+p^2+q^2$, gde su $p=\frac{\partial f}{\partial x}$, $q=\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ugao θ između dve krive na površini se određuje iz skalarnog proizvoda

$$(d\vec{r}_M\,\delta\vec{r}_M)=|d\vec{r}_M|\cdot|\delta\vec{r}_M|\cos\theta=(\dot{r}_u\,du+\dot{r}_v\,dv,\ \dot{r}_u\,\delta u+\dot{r}_v\,\delta v)=$$
$$=E\,du\,\delta u+F\,(du\,\delta v+\delta u\,dv)+G\,(dv\,\delta v),$$

gde su: d — znak diferencijala za prvu krivu, a δ — za drugu, $|d\vec{r}_M|=ds$ i $|\delta\vec{r}_M|=\delta s$ elementi dužine luka prve i druge krive. Uslov ortogonalnosti linija je $du\,\delta v+\delta u\,dv=0$. Diferencijalni element dQ površine, paralelogram sa stranama $\dot{r}_u\,du$ i $\dot{r}_v\,dv$ ima vrednost

$$dQ=|[\dot{r}_u\dot{r}_v]|\,du\,dv=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=H\,du\,dv.$$

Tangentna ravan i normala površine. Tangente na sve linije površine koje prolaze kroz običnu tačku te površine pripadaju istoj ravni koja se zove *tangentna ravan* površine. Pošto vektori $\dot{r}_u$ i $\dot{r}_v$ pripadaju tangentnoj ravni, vektorska parametarska jednačina tangentne ravni je ova

$$\vec{r}_P=\vec{r}_M+a\dot{r}_u+b\dot{r}_v,$$

gde su a i b parametri. Posle eliminisanja parametara imamo ovu skalarnu jednačinu ravni izraženu pomoću vektorskih operacija

$$(\vec{r}_P-\vec{r}_M, [\dot{r}_u, \dot{r}_v])=0.$$

Prava upravna na tangentnoj ravni u tački dodira je *normala površine* u toj tački. Njene vektorske jednačine: $[\vec{r}_P-\vec{r}_M, [\dot{r}_u, \dot{r}_v]]=0$ ili $\vec{r}_P-\vec{r}_M=h\,[\dot{r}_u, \dot{r}_v]$, gde je h parametar.

Za jednačinu površine u obliku $z=f(x,y)$ imamo: jednačinu tangentne ravni: $(\xi-x)z_x+(\eta-y)z_y-(\zeta-x)=0$, jednačina normale: $\frac{\xi-x}{z_x}=\frac{\eta-y}{z_y}=\frac{\zeta-z}{-1}$. Za oblik jednačine $F(x,y,z)=0$: tangentna ravan $(\xi-x)\,F_x+(\eta-y)\,F_y+(\zeta-z)\,F_z=0$, normala $\frac{\xi-x}{F_x}=\frac{\eta-y}{F_y}=\frac{\zeta-z}{F_z}$. Za parametarski oblik:

$$\Delta_1\,(\xi-x)+\Delta_2\,(\eta-y)+\Delta_3\,(\zeta-z)=0,$$

gde su $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ koordinate vektora $[\dot{r}_u, \dot{r}_v]$, npr. $\Delta_1=\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$,

$$\text{i}\quad \frac{\xi-x}{\Delta_1}=\frac{\eta-y}{\Delta_2}=\frac{\zeta-z}{\Delta_3}.$$

Krivina linije na površini. Linija na površini u opštem slučaju je prostorna kriva sa jednačinom $\vec{r}=\vec{f}(u, v)$, gde su $u=u(t)$, $v=v(t)$. Tangenta na krivu leži u tangentnoj ravni površine. Oskulatorna ravan krive daje (u opštem slučaju) *kos presek površine.* Presek površine sa ravni koja sadrži tangentu i normalu površine je *normalan presek površine* za datu tangentu.

Uporedjivanje krivine K krive linije kosog preseka (u oskulatornoj ravni) i krivine K_n u normalnoj ravni sa istim pravcem tangente dovodi do jednačine

$$(*)\quad K_n=K\cos\psi,$$

gde je ψ ugao izmedju glavne normale i normale površine i

$$(**)\quad K_n=\frac{D_1\,du^2+2D_2\,dudv+D_3\,dv^2}{E\,du^2+2F\,dudv+G\,dv^2}.$$

Brojilac je tzv. *druga osnovna forma površine* sa ovim vrednostima koeficijenata:

$$D_1=-(\dot{n}_u\,\dot{r}_u)=\frac{1}{H}(\ddot{r}_{uu}[\dot{r}_u\,\dot{r}_v])=\frac{1}{\mathrm{H}}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$D_2=-(\dot{n}_v\,\dot{r}_u)=\frac{1}{H}(\ddot{r}_{uv}\,[\dot{r}_u\dot{r}_v])=\frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

$$D_3=-(\dot{n}_v\dot{r}_v)=\frac{1}{H}(\ddot{r}_{vv}\,[\dot{r}_u\,\dot{r}_v])=\frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

gde je $\vec{n}$ jedinični vektor normale površine i $\dot{n}_u$ i $\dot{n}_v$ vektorski delimični izvodi tog orta po u i v.

Jednačina (*) napisana pomoću poluprečnika krivina R i R_n (normalnog preseka)

$$R=R_n\cos\psi$$

izražava *Menijeovu teoremu*: centar krivine kosog preseka je projekcija centra krivine normalnog preseka na ravan kosog.

Ako je površina odredjena jenačinom $z=f\,(x, y)$ i iskoristimo *Monževe oznake*

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

druga osnovna kvadratna forma ima vrednost

$$\frac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

U tangentnoj ravni obične tačke postoje dva ortogonalna pravca T_1 i T_2 za koje normalna krivina K_n ima ekstremne vrednosti: K_1 i K_2. To su *dva glavna pravca* sa *glavnim krivinama* K_1 i K_2 odnosno poluprečnicima krivine R_1 i R_2.

Označimo sa φ ugao između nekog pravca $\vec{T}$ i ose pravca $\vec{T}_1$ sa glavnom krivinom K_1. Tada se normalna krivina K_n za pravac T izražava ovim *obrascem Leonarda Ajlera*

$$K_n = K_1 \cos^2\varphi + K_2 \sin^2\varphi.$$

Važna su dva izraza: *srednje krivine*

$$M = \frac{1}{2}(K_1+K_2) = \frac{D_1G-2D_2F+D_3E}{2(EG-F^2)}$$

i *totalne (Gausove) krivine površine* K_G sa vrednošću

$$K_G = K_1K_2 = \frac{D_1D_3-D_2^2}{EG-F^2}.$$

Prema tome R_1 i R_2 su koreni ove kvadratne jednačine

$$KR^2-2MR+1=0.$$

Vrednosti odnosa $\frac{dv}{du}$ se određuju za glavne preseke iz jednačine

$$(^\circ)\quad (GD_2-FD_3)\left(\frac{dv}{du}\right)^2+(GD_1-ED_3)\left(\frac{dv}{du}\right)+(FD_1-ED_2)=0,$$

čiji koeficijenti zavise samo od koeficijenata prve i druge forme površine.

Ako su koeficijenti prve i druge osnovne kvadratne forme površine proporcionalni, svi koeficijenti prethodne jednačine su jednaki nuli, svaka dva ortogonalna pravca u tangentnoj ravni mogu biti izabrana za glavne pravce, glavne krivine su jednake i imaju vrednost $\sqrt{K_G}$. Takva tačka se naziva *sferna* ili *pupčasta tačka površine.*

Kriva na površini zove se *linija krivine površine*, ako se pravac tangente na krivu poklapa sa jednim od glavnih pravaca površine u svakoj tački krive. Diferencijalna jednačina $(^\circ)$ može se smatrati kao diferencijalna jednačina para linija krivine na površini.

Obične tačke površine mogu se razlikovati prema znacima glavnih krivina površine K_1 i K_2. Pošto znak Gausove krivine $K_G = K_1K_2$ zavisi samo od znaka izraza $D_1D_3-D_2^2$ možemo navesti ove slučajeve običnih tačaka površine:

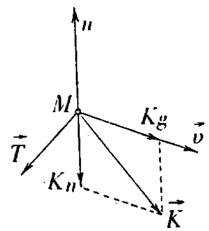
1. $D_1D_3-D_2^2>0$, K_1 i K_2 su istih znakova, *tačka* je *eliptička*,

2. $D_1D_3-D_2^2<0$, K_1 i K_2 su raznih znakova, *tačka* je *hiperbolička*,

3. $D_1D_3-D_2^2=0$, bar jedna od glavnih krivina jednaka je nuli, tačka je *parabolička.*

Ovi nazivi tačaka stoje u vezi sa oblikom preseka (*Dupin-ova indikatrisa*) površine oko date tačke sa ravni, koja je paralelna tangentnoj ravni i nalazi se na beskrajno malom rastojanju od te ravni.

Geodezijska krivina i geodezijske linije. Krivina, kao vektor, krive linije na površini leži u oskulatornoj ravni u kojoj se nalazi i normala površine sa jediničnim vektorom $\vec{n}$. Prema tome krivinu $\vec{K}$ krive možemo rastaviti na dve komponente, jednu u pravcu normale $\vec{n}$ i drugu u pravcu normale $\vec{v}$ na tangenti u tangentnoj ravni (sl. 77). Prva komponenta je, kako smo videli, krivina normalnog preseka $\vec{K}_n$, druga komponenta, koju označimo sa K_g, zove se *geodezijska krivina* date krive na površini u datoj tački.



Sl. 77 — Geodezijska krivina

Kriva na površini, u čijim svima tačkama geodezijska krivina ima vrednost nule, zove se *geodezijska linija površine.* Svaka geodezijska linija na površini se određuje jednom tačkom iz koje ona izlazi i pravcem tangente u toj tački. Prema tome kroz datu tačku površine prolazi beskrajno mnogo geodezijskih linija. Geodezijske linije imaju više važnih osobina. 1. Glavna normala geodezijske linije ima pravac normale na površini.

2. Linija najkraćeg rastojanja po površini između dve tačke na njoj je geodezijska linija (obrnuti stav nije uvek tačan). 3. Pri deformaciji površine, pri kojoj se dužine ne menjaju, geodezijske linije zadržavaju svoj položaj na površini i posle deformacije.

Ako je površina određena jednačinom $z=f(x,y)$, diferencijalna jednačina geodezijske linije se izražava ovako:

$$(1+p^2+q^2)\frac{d^2y}{dx^2}=$$

$$=pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+(2ps-qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(pr-2qs)\left(\frac{dy}{dx}\right)-qr.$$

Integral te jednačine sadrži dve proizvoljne konstante, tj. $y=\varphi(x, C_1, C_2)$. Konstante se određuju iz dva uslova:

$$y_0=\varphi(x_0, C_1, C_2) \text{ i } \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\varphi'(x_0, C_1, C_2).$$

Porodica površina. Obvojnica (anvelopa) površina. Jednačina $F(x, y, z, c)=0$ koja sadrži parametar c određuje *jednoparametarsku porodicu površina.* Ako uočimo dve jednačine

$$F=0, \frac{\partial F}{\partial c}=0,$$

za dato c one određuju granični položaj preseka površine za c i za $c+\Delta c$ kad $\Delta c\to 0$. Ova kriva na svakoj površini porodice određuje *karakteristiku površine.* Geometrijsko mesto karakteristika pri promeni parametra c je površina koja se zove *obvojnica (anvelopa) date porodice površina.* Obvojnica dodiruje svaki član porodice duž karakteristike. Ako prethodnim jednačinama dodamo još treću jednačinu $\frac{\partial^2 F}{\partial c^2}=0$, sistem jednačina

$$F(c)=0, \frac{\partial F}{\partial c}=0, \frac{\partial^2 F}{\partial c^2}=0$$

za svako određeno c određuje tačku u prostoru; iste jednačine sa promenljivim c određuju liniju u prostoru koja se zove *povratna linija.*

Za jasnije objašnjenje uvedenih pojmova služi tablica sadržaja odgovarajućih jednačina za $c=\text{const}=c_0$, za c promenljivo, i posle eliminisanja parametra c.

c_0	c	c je eliminisano
$F(c_0)=0$, površina	$F(c)=0$, porodica površina	—
$F(c_0)=0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)_{c=c_0}=0$, kriva	$F(c)=0, \frac{\partial F}{\partial c}=0$, obvojna površina	$\Phi(x, y, z)=0$ obvojna površina
$F(c_0)=0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)_{c=c_0}=0$, $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial c^2}\right)_{c=c_0}=0$, tačka	$F(c)=0, \frac{\partial F}{\partial c}=0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial c^2}=0$, povratna kriva	$\Phi_1(x, y, z)=0$, $\Phi_2(x, y, z)=0$, povratna kriva.

Dvoparametarska porodica površina. Sistem od dve jednačine (1) $F_1(x, y, z, c_1, c_2)=0$, (2) $F_2(x, y, z, c_1, c_2)=0$, gde su c_1, c_2 proizvoljni parametri, odredjuje *dvoparametarsku porodicu površina.* Za dat par vrednosti parametara c_1 i c_2 taj sistem odredjuje prostornu krivu, presek datih površina iz porodice. Svaku takvu krivu ćemo nazivati *kriva porodice*, odnosno *kriva izvodnica.* Neka je jednačinama (3) $\Phi_1(x, y, z)=0$ i (4) $\Phi_2(x, y, z)=0$ data *kriva-vodilja* koju treba da seče prostorna kriva iz porodice, kriva izvodnica. Ako iz jednačina (1), (2), (3), (4) eliminišemo x, y, z dobićemo jednačinu (5) $\varphi(c_1, c_2)=0$ za odabiranje onih vrednosti parametara za koje izvodnica seče vodilju. Ako iz jednačina

$$F_1(x, y, z, c_1, c_2)=0, \quad F_2(x, y, z, c_1, c_2)=0, \quad \varphi(c_1, c_2)=0$$

eliminišemo parametre c_1, c_2 dobićemo jednačinu $F(x, y, z)=0$, koja pretstavlja g. m. krive porodice koja seče datu vodilju.

1. Cilindarska površina. Sistemi jednačina

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1, \quad a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2$$

odredjuje dvoparametarsku porodicu ravni; pod uslovima da su koeficijenti $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{23}$ stalni i da nisu svi proporcionalni, svi preseci tih ravni imaju isti pravac sa kosinusima

proporcionalnim determinantama matrice $\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \end{Vmatrix}$ i prema tome mogu služiti kao izvodnice cilindarske površine. Neka je vodilja odredjena jednačinama $\Phi_1(x, y, z) = 0$, $\Phi_2(x, y, z) = 0$. Rezultat eliminisanja x, y, z iz četiri navedene jednačine neka dovodi do jednačine $\varphi(c_1, c_2) = 0$, tada je jednačina

$$\varphi(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) = 0$$

opšti oblik jednačine cilindarske površine. Ovoj konačnoj jednačini odgovara ova delimična diferencijalna jednačina prvoga reda: $\frac{\partial\varphi}{\partial x} l + \frac{\partial\varphi}{\partial y} m + \frac{\partial\varphi}{\partial z} n = 0$, koja izražava ortogonalnost normale na površinu i pravca izvodnice, čiji su kosinusi proporcionalni determinantama napisane matrice. Eliminisanje konstanata l, m, n dovodi do jednačine $rt - s^2 = 0$, iz koje zaključujemo da su sve tačke cilindarske površine parabolične.

2. *Konusna površina.* Prava izvodnica se odredjuje jednačinama $x - x_0 = c_1(z - z_0)$, $y - y_0 = c_2(z - z_0)$. Prava prolazi kroz stalnu tačku x_0, y_0, z_0. Neka je vodilja data jednačinama $\Phi_1(x, y, z) = 0$, $\Phi_2(x, y, z) = 0$. Rezultat eliminisanja: $\varphi(c_1, c_2) = 0$. Jednačina konusne površine: $\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0$. Diferencijalna jednačina:

$$(x - x_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

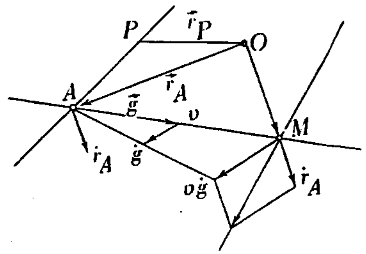
Normala na površinu je ortogonalna prema izvodnici koja prolazi kroz stalnu tačku. I sve obične tačke konusne površine su parabolične. Singularna tačka površine je stalna tačka sa koordinatama x_0, y_0, z_0.

3. *Pravolinijske površine opšteg tipa.* Pravolinijska površina je g. m. pravih koje za svaku tačku krive-vodilje imaju odredjeni položaj u prostoru.

Svaka tačka M pravolinijske površine sa vektorom položaja $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_m$ (sl. 78) može se odrediti vektorskom jednačinom

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A(u) + v\vec{g}(u),$$

gde je: $\vec{r}_A$ — vektor-funkcija položaja tačke A vodilje, $\vec{g}$ jedinični vektor-funkcija prave izvodnice, u zajednički parametar vektor-funkcija i v algebarska vrednost vektora $\overrightarrow{AM}$ prema vektoru $\vec{g}$. Parametri u i v su koordinate tačke na pravolinijskoj površini.



Sl. 78 — **Linijska površina**

Vektor položaja $\vec{r}_P$ svake tačke P tangentne ravni na površini u tački M zadovoljava ovu skalarnu jednačinu u vektorskom obliku

$$\left(\vec{r}_P - \vec{r}_A,\ \left[\vec{g},\ \frac{d}{du}\vec{r}_A + v\frac{d}{du}\vec{g}\right]\right) = 0.$$

Ako vektori $\vec{r}_A(u)$ i $\vec{g}(u)$ zadovoljavaju uslov

$$\left(\frac{d}{du}\vec{r}_A,\ \left[\vec{g},\ \frac{d}{du}\vec{g}\right]\right) = 0,$$

dve susedne izvodnice seku se u istoj tački i površina se može sastaviti iz elementarnih ravnih površina između takve dve izvodnice. Pošto se tada celokupa takva površina može razviti u ravan, ona se naziva *razvojna površina* ili *torza*. G. m. zajedničkih tačaka na izvodnicama je *povratna linija na torzi*. Torze imaju ove osobine: a. normale na torzi u svim tačkama izvodnice imaju isti pravac; b. sve tačke torze su parabolične; Gausova krivina u svim tačkama torze jednaka je nuli; c. izvodnice i njihove ortogonalne trajektorije sačinjavaju sistem linija krivina na torzi. U razvojne površine spadaju cilindarske i konusne površine.

Ako pravolinijska površina nije razvojna, ona se naziva *nerazvojna* ili, kratko, *kosa*.

Numerišimo sa 1, 2, 3 izvodnice što odgovaraju vrednostima parametra u i to: u, $u + \Delta u$, $u + 2\Delta u$. Ako sa $\Delta\sigma$ označimo najkraće rastojanje između 1 i 2 izvodnice, a sa

$\Delta\alpha$ ugao između tih izvodnica, granična vrednost $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta\alpha}=\frac{d\sigma}{d\alpha}$ se naziva *parametar rasporeda* pravolinijske površine za datu izvodnicu. Podnožje najkraćeg rastojanja između 1 i 2 u graničnom položaju označimo sa C_1, ona se zove *centar* 1. izvodnice. Ako sa C_2 označimo centar 2. izvodnice, granična vrednost $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{C_1'C_2}{\Delta\sigma}=\frac{dh}{d\sigma}$, gde je C_1' projekcija tačke C_1 na izvodnicu 2, ima naziv *parametra klizanja pravolinijske površine*. Najzad, ako se $\Delta\beta$ označimo ugao između ravni 1. izvodnice i najkraćeg rastojanja 1. i 2. izvodnice i ravni kroz 2. izvodnicu i najkraćeg rastojanja 2. i 3. izvodnice, granična vrednost $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta\sigma}=\frac{d\beta}{d\sigma}$ je *parametar obrtanja pravolinijske površine oko date izvodnice* 1.

Tri diferencijalne jednačine, recimo, u obliku

$$\frac{d\alpha}{d\sigma}=f_1(\sigma),\quad \frac{dh}{d\sigma}=f_2(\sigma),\quad \frac{d\beta}{d\sigma}=f_3(\sigma),$$

mogu se smatrati kao *prirodne jednačine kose* ($d\sigma\neq 0$) *pravolinijske površine*. Za razvojnu površinu ($d\sigma=0$), može se uzeti, napr. promenljiva α ili h, kao luk prevojne krive.

Primetimo još da u primenama teorije pravolinijskih površina igra važnu ulogu g. m. centara izvodnica, ono se zove *stežna* ili *strikciona linija* pravolinijske površine.

Druga primedba. Teorija pravolinijskih površina je osnova teorije tzv. *aksoida*, g. m. osa obrtanja čvrstog tela.

4. *Obrtna površina*. Geometrijsko mesto tačaka krive u ravni kad se ova kriva obrće oko ose u ravni krive je *obrtna površina*.

Ako za osu obrtanja uzmemo Oz osu, a za krivu koja se obrće (meridijan) krivu u ravni Oxz sa jednačinom $z=f(x)$, jednačine obrtne površine u parametarskom obliku mogu se izraziti

$$x=u_1\cos u_2,\quad y=u_1\sin u_2,\quad z=f(u_1),$$

gde je u_1 rastojanje tačke površine od ose obrtanja Oz, a u_2 ugao ravni meridijana i ravni Oxz. U rešenom obliku u Dekartovim koordinatama imamo jednačinu $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

Delimična diferencijalna jednačina ove površine izgleda ovako $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ i izražava ovu geometrijsku osobinu obrtne površine: normala na obrtnu površinu leži u ravni meridijana.

Zavojna površina. Ako sve tačke nepromenljive krive opisuju zavojnice sa istom osom i istim hodom, onda nastaje *zavojna površina*. Presek te površine sa ravni koja prolazi kroz osu zavojnice je *profil* zavojne površine. Parametarske jednačine zavojne površine su

$$x=u_1\cos u_2,\quad y=u_1\sin u_2,\quad z=hu_2+f(u_1),$$

gde su: u_1 rastojanje tačke od ose Oz zavojnice, u_2 — ugao ravni profila sa Oxz ravni, h konstanta iz jednačine $H=2\pi h$, gde je H hod zavojnice. U Dekartovim koordinatama jednačina uzima oblik: $z=h\operatorname{arc\,tg}(y/x)+f(\sqrt{x^2+y^2})$.

Ako je $f(u_1)=0$, imamo *običnu zavojnu površinu* ili *helikoid*, sa profilom pravom linijom upravnom na osu zavojnice. Za $h=0$ imamo obrtnu površinu: $z=\Phi(x^2+y^2)$.

Ako je profil prava u ravni Oxz sa jednačinom

$$z=x\operatorname{cotg}\gamma+b,$$

gde su b i γ očevidni parametri prave, površina sa parametarskim jednačinama

$$x=u_1\cos u_2,\quad y=u_1\sin u_2,\quad z=hu_2+u_1\operatorname{cotg}\gamma+b$$

je *Arhimedova zavojna površina*.

Ako se zavojna površina obrazuje kretanjem nepromenljive krive u prostoru, za sastavljanje parametarskih jednačina takve linije uvodi se pomoćni koordinatni sistem $O'\xi\eta\zeta$ sa početkom O' na Oz osi, sa osom $O'\zeta$ u pravcu Oz ose i sa uglom u_2 između Ox i $O'\xi$ osa. Između koordinata ξ, η, ζ i x, y, z iste tačke tada se postavljaju kad je $OO'=hu_2$ ove veze:

$$x=\xi\cos u_2-\eta\sin u_2,\quad y=\xi\sin u_2+\eta\cos u_2,\quad z=\zeta+h\,u_2.$$

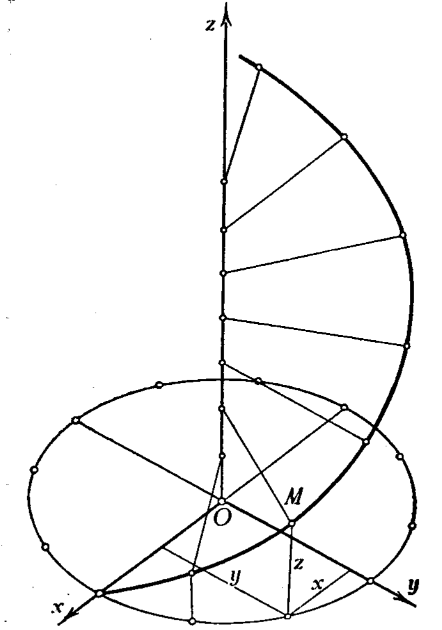
Svaka tačka trijedra $O'\xi\eta\zeta$ pri promeni parametra u_2 opisuje zavojnicu u odnosu na trijedar $Oxyz$.

Ako je nepromenljiva kriva u odnosu na trijedar $O'\xi\eta\zeta$ data parametarskim jednačinama $\xi = f_1(u_1)$, $\eta = f_2(u_1)$, $\zeta = f_3(u_1)$, parametarske jednačine zavojne površine koju opisuje data kriva u odnosu na trijedar $Oxyz$ imaju oblik:

$$x = f_1(u_1)\cos u_2 - f_2(u_1)\sin u_2,\quad y = f_1(u_1)\sin u_2 + f_2(u_1)\cos v_2,$$

$$z = f_3(u_1) + hu_2.$$

Ako u sistemu $O'\xi\eta\zeta$ ulogu nepromenljive krive igra prava sa parametarskim jednačinama $\xi = a$, $\eta = u_1$, $\zeta = u_1 \operatorname{cotg} \gamma$, parametarske jednačine u odnosu na trijedar $Oxyz$ u obliku $x = a\cos u_2 - u_1 \sin u_2$, $y = a \sin u_2 + u_2 \cos u_1$, $z = hu_2 + u_1 \operatorname{cotg}\gamma$, gde su a, h i γ konstante, određuju *pravolinijsku zavojnu površinu.*



Sl. 79 — Helikoid

Naročito je važan specijalan slučaj površine *helikoida* (sl. 79), kad prava izvodnica stoji upravno na Oz osi. Parametarske jednačine helikoida su: u vektorskom obliku

$$\vec{r}_M = u_1(\vec{i}\cos u_2 + \vec{j}\sin u_2) + hu_2\vec{k},$$

u skalarnom $x = u_1 \cos u_2$, $y = u_1 \sin u_2$, $z = hu_2$. Koordinatne linije $u_1 = \text{const.}$ su zavojnice na valjku poluprečnika u_1, a $u_2 = \text{const.}$ pravolinijske izvodnice Pošto je

$$ds^2 = du_1^2 + (u_1^2 + h^2)\,du_2^2,$$

koordinatne linije su ortogonalne. Jedinični vektor $\vec{n}$ normale na površini ima za koordinate

$$\frac{h\sin u_2}{\sqrt{u_1^2 + h^2}},\quad \frac{-h\cos u_2}{\sqrt{u_1^2 + h^2}},\quad \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + h^2}}.$$

Za tačke koordinatne linije, zavojnice, normala čini stalan ugao sa Oz osom. Gausova krivina iznosi $K = -\dfrac{h^2}{(u_1^2 + h^2)^2} < 0$. Srednja krivina $H = 0$ i prema tome površina helikoida spada u *minimalne površine*; to znači da je površina nekog dela te površine omeđenog nekom konturom najmanja u odnosu na svaku drugu površinu sa istom konturom.

5.4. Teorija polja

Polje je skup tačaka kad je za svaku tačku skupa određena neka veličina, skalarne, vektorske ili neke druge prirode. Tada se kaže da je ta veličina *funkcija polja.* Skup tačaka je *oblast polja.* Oblast, u Euklidovom prostoru, može biti tro-dvo-jednodimenziona, pa čak i da se sastoji samo iz diskretno raspoređenih tačaka. Zaustavimo se na opštem slučaju kad je oblast trodimenziona sa neprekidno raspoređenim tačkama. Položaj tačke polja se određuje vektorom položaja $\vec{r}$ u odnosu na neku određenu tačku prostora ili pomoću tri skalara, koordinata tačke u Dekartovom ili u kakvom drugom sistemu. Oznake za određenu tačku $M : \vec{r}_M$ i $M(x_M, y_M, z_M)$, za proizvoljnu tačku: $\vec{r}$ i x, y, z.

Ako je u nekoj oblasti polja veličina polja jednaka nuli, onda se kaže da je ta *oblast prazna.*

Proučavaćemo samo *skalarno* i *vektorsko polje.*

Skalarno polje. Jednačina $U = U(\vec{r})$ ili $U = U(x, y, z)$, gde je U veličina nekog skalara, a $U(\vec{r})$ i $U(x, y, z)$ skalarne funkcije tačke sa vektorom položaja $\vec{r}$, ili sa Dekartovim koordinatama x, y, z, određuje *skalarno polje skalara* U.

Ako veličina U ne zavisi od vremena, polje se zove *stacionarno.* Dalje pretpostavljamo da su skalarne funkcije $U(x, y, z)$ neprekidne sa neprekidnim potrebnim delimičnim izvodima.

Za geometrijsko proučavanje skalarnog polja služe površine čije su jednačine $U(x, y, z) = \text{const.}$ ili u vektorskom obliku $U(\vec{r}) = \text{const.}$, koje se zovu *ekviskalarne* ili *nivoske površine skalarnog polja.*

12*

Gradijent skalarne funkcije za datu tačku polja je vektor koji ima:

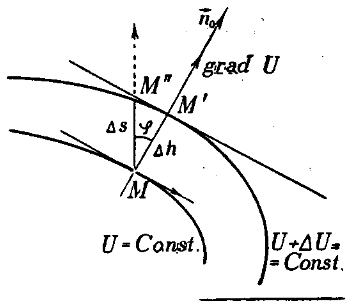
1. Pravac normale na ekviskalarnoj površini date tačke polja,
2. Onaj smer u kome skalar U raste,
3. Kao intenzitet graničnu vrednost odnosa priraštaja ΔU skalara U prema rastojanju Δh po normali između dve beskrajno bliske ekviskalarne površine, kad Δh teži nuli, tj. $\lim\limits_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta h} = \frac{dU}{dh}$ (sl 80). Gradijent skalarne funkcije U se označava sa grad U i čita se: gradijent U.

Postavljena definicija gradijenta se izražava vektorskom jednačinom: grad $U = \vec{n}_0 \cdot \frac{dU}{dh}$, gde je $\vec{n}_0$ jedinični vektor normale.

Pošto je $(\text{grad}\, U, \vec{dr}) = \left(\vec{n}_0 \frac{dU}{dh},\ \vec{dr}\right) = \frac{dU}{dh} \cdot ds \cdot \cos\varphi = dU$,

gde je φ ugao između $\vec{n}_0$ i $\vec{dr}$ i $ds \cdot \cos\varphi = dh$, onda iz jednačine

$$(\text{grad}\, U, \vec{dr}) = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$



Sl. 80 — Gradijent

dolazimo do vrednosti koordinata grad U u Dekartovim koordinatama

$$\text{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k},$$

tj. $\text{grad}\, U\left(\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}\right)$.

Skalar $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{dU}{ds}$ je *izvod skalarne funkcije u datom pravcu* iz tačke polja.

Ako je $U = U(x, y, z)$, a kriva je određena parametarskim jednačinama $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, onda je

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds} = (\text{grad}\, U, \vec{T}),$$

gde je $\vec{T}$ jedinični vektor datog pravca sa koordinatama

$$\vec{T}\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right).$$

Prema tome izvod funkcije polja u datom pravcu je projekcija gradijenta polja za datu tačku na osu datog pravca.

Ako uvedemo, kao vektor, operator *nabla* sa oznakom ∇ i vrednošću

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

onda se gradijent skalarne funkcije U može smatrati kao proizvod vektora nabla i skalara U, tj.

$$\text{grad}\ U = \nabla U = \vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Nabla se zove i *Hamiltonov operator*.

Navedimo nekoliko pravila pri upotrebi nabla operatora:

1. $\nabla C = 0$, $(C = \text{const})$, 2. $\nabla(U_1 + U_2 + \ldots) = \nabla U_1 + \nabla U_2 + \ldots$ 3. $\nabla kU = k\nabla U$, $(k = \text{const})$, 4. $\nabla U_1 U_2 = U_1 \nabla U_2, + U_2 \nabla U_1$, 5. $\nabla f(U) = f'U\nabla U$, 6. $\nabla f(U_1,\ U_2, \ldots) = \frac{\partial f}{\partial U_1}\nabla U_1 + \frac{\partial f}{\partial U_2}\nabla U_2 + \ldots$ 7. $(\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$,

gde je Δ *Laplasov operator* ili *Laplasijan*. 8. $[\nabla, \nabla] = 0$. Druge obrasce navešćemo na kraju ovog paragrafa.

Vektorsko polje. Vektorska jednačina

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}) \text{ ili } \vec{V} = \vec{V}(x, y, z),$$

gde je $\vec{V}$ neka vektorska veličina, a sa desne strane $\vec{V}$ je simbol vektorske funkcije vektora položaja tačke sa koordinatama x, y, z, određuje *vektorsko polje vektora* $\vec{V}$.

I ovde ćemo analizirati samo stacionarno vektorsko polje, koje se ne menja u vezi sa nekim dopunskim parametrom, napr. vremenom.

Za jasniju geometrijsku predstavu i proučavanje vektorskog polja služe linije sa diferencijalnom osobinom izraženom

vektorskom jednačinom $[\vec{T}, \vec{V}]=0$ ili skalarnim jednačinama u obliku (1) $dx : V_x = dy : V_y = dz : V_z$, koje tvrde da kroz svaku tačku polja prolazi linija sa tangentom u pravcu datog vektora $\vec{V}$ polja u toj tački. Ove linije se zovu *vektorske linije ili linije polja*. U specijalnim slučajevima to su linije sila, linije toka i dr.

Neka su $F_1(x, y, z)=C_1$, $F_2(x, y, z)=C_2$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, opšti integrali sistema od dve diferencijalne jednačine (1). Ako se konstante C_1 i C_2 odrede iz uslova da koordinate x_0, y_0, z_0 neke date tačke polja zadovoljavaju jednačine integrala, onda te jednačine određuju vektorsku liniju kroz datu tačku polja.

Ako se u vektorskom polju konstruiše neka kontura, onda je g. m. vektorskih linija kroz sve tačke konture površina koja se zove *vektorska cev* ili *solenoid*.

Za određivanje izvoda u datom pravcu vektora $\vec{V}=\vec{V}(\vec{r})$ vektorskog polja možemo smatrati da je vektor položaja $\vec{r}$ tačke polja takva funkcija pomoćne promenljive t, da vektor $\dot{r}_t$ ima dati pravac. Kako je tada $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, onda je i vektor $\vec{V}$ preko svojih koordinata, koje su funkcije od x, y, z, takođe funkcija t. Pošto je $\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}$, neposredno diferenciranje daje:

$$d\vec{V}=\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}dx+\frac{\partial V_x}{\partial y}dy+\frac{\partial V_x}{\partial z}dz\right)\vec{i}+$$
$$+\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}dx+\frac{\partial V_y}{\partial y}dy+\frac{\partial V_y}{\partial z}dz\right)\vec{j}+$$
$$+\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}dx+\frac{\partial V_z}{\partial y}dy+\frac{\partial V_z}{\partial z}dz\right)\vec{k}=(d\vec{r}, \nabla)\vec{V}.$$

Ako za neku tačku polja konstruišemo beskrajno malu ravnu površinu $d\sigma$ sa jediničnim vektorom $\vec{n}_0$ normale na toj ravni, onda je proizvod $\vec{n}_0\, d\sigma$ *orijentisani diferencijalni element površine.*

Skalarni proizvod $(\vec{V}, d\sigma\vec{n}_0)$ je *elementarno proticanje* vektora polja $\vec{V}$ kroz orijentisani element površine. Ako sa σ označimo neku konačnu oblast površine u polju, integral

$$\Pi_\sigma=\iint_\sigma(\vec{V}\vec{n}_0)\,d\sigma=\iint_\sigma(V_x\cos\alpha+V_y\cos\beta+V_z\cos\gamma)\,d\sigma=$$
$$=\iint_\sigma(V_x\,dydz+V_y\,dzdx+V_z\,dxdy),$$

proširen na celu oblast σ, je *proticanje vektora polja $\vec{V}$ kroz datu površinu* σ. Uglovi α, β, γ su uglovu normale $\vec{n}_0$ sa Dekartovim osama.

Ako neku tačku polja okružimo nekom površinom σ, u čijoj se unutrašnjosti nalazi data tačka, i zapreminu ograničenu tom površinom označimo sa v, onda je granična vrednost odnosa proticanja Π_σ i zapremine v, tj.

$$\lim_{v\to 0}\frac{\Pi_\sigma}{v}=\lim_{v\to 0}\frac{\iint_\sigma(\vec{V}\vec{n}_0)\,d\sigma}{v},$$

kad zapremina v teži nuli, skalar, koji se zove *divergencija datog vektorskog polja u datoj tački*. Divergencija vektora $\vec{V}$ polja se označava sa div $\vec{V}$. U Dekartovim koordinatama taj skalar ima vrednost

$$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z},$$

pa prema tome se javlja kao skalarni proizvod simbola nabla i vektora polja, tj. $\operatorname{div}\vec{V}=(\nabla\vec{V})$.

Vrlo je važna ova teorema *G. Green-a*, koja je poznata u literaturi i kao teorema *Gauss-a*, i kao teorema *Ostrogradskog*. U vektorskom obliku ona glasi:

$$\iint_\sigma(\vec{V}, \vec{n}_0)\,d\sigma=\iiint_v\operatorname{div}\vec{V}\,dv.$$

U hidromehanici div $\vec{V}$ se tumači kao *jačina izvora* odnosno *ponora*.

Skalarni proizvod $(\vec{V}, \vec{dr_M})$ je *rad vektora polja na elementarnom pomeranju* tačke polja. Usvojeno je da taj izraz zadržava naziv rada bez obzira na imenovanje članova proizvoda.

Krivolinijski integral

$$\int_L (\vec{V}, \vec{dr}) = \int_L (\vec{V}, \vec{T})\, ds = \int_L (V_x dx + V_y dy + V_z dz),$$

proširen na tačke krive L, izražava rad vektora $\vec{V}$ na celokupnoj dužini krive L.

Ako je kriva L zatvorena, gornji krivolinijski integral ima naziv *cirkulacije vektora $\vec{V}$ po zatvorenoj krivoj*. Odgovarajući integral se označava ovako

$$\oint_L (\vec{V} \vec{dr}).$$

Najzad uvedimo još tzv. *rotor* sa oznakom rot $\vec{V}$ ili curl $\vec{V}$. Prirodna definicija rotora

$$\text{rot}\, \vec{V}(\vec{r}) = \lim_{\sigma \to 0} \left\{ \frac{1}{v} \iint_\sigma [\vec{n}_0, \vec{V}(\vec{r}_\sigma)]\, d\sigma \right\}.$$

Dekartove koordinate ovog vektora imaju izraze:

$$\text{rot}\, \vec{V} \left\{ \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right\}.$$

Pomoću operatora nabla rotor se izražava ovako

$$\text{rot}\, \vec{V} = [\nabla, \vec{V}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

Teorema Stoksa postavlja vezu izmedju cirkulacije po zatvorenoj konturi L i proticanja rotora kroz proizvoljnu površinu sa konturom L. Teoremi odgovara ova jednačina

$$\oint_L (\vec{V} \vec{dr}) = \iint_\sigma (\text{rot}\, \vec{V}, \vec{n}_0) d\sigma = \iint_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \cos(\vec{n}_0, x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \cos(\vec{n}_0, y) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \cos(\vec{n}_0, z) \right\} d\sigma,$$

gde je $\vec{n}_0$ jedinični vektor spoljašnje normale površine σ.

Ako je vektor $\vec{V}$ gradijent skalarnog polja skalara U, tj. $\vec{V} = \text{grad}\ U$ ili $V_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $V_z = \frac{\partial U}{\partial z}$, funkcija $U(\vec{r})$ se zove *potencijal polja*. Da polje vektora $\vec{V}$ bude potencijalno, potrebno je i dovoljno da je ispunjen uslov rot $\vec{V} = 0$.

U potencijalnom polju rad vektora polja na liniji koja spaja dve tačke polja ne zavisi od oblika krive L, jer je

$$\int_L (\vec{V}, \vec{dr}) = \int_L (\text{grad}\ U, \vec{dr}) = \int_{M_0}^{M} dU = U(\vec{r}_M) - U(\vec{r}_{M_0}).$$

Divergencija potencijalnog polja jednaka je Laplasijanu potencijala, jer je div $\vec{V} = \text{div grad}\ U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta\ U$.

Vektorsko polje je solenoidno, ako je divergencija njegovog vektora $\vec{V}$ u svakoj tački polja jednaka nuli, tj. div $\vec{V} = 0$. Vektorske linije takvog pola ili su zatvorene u polju, ili počinju i završavaju se na granici polja ili odlaze u beskonačnost.

Polje rotora svakog vektorskog polja je solenoidno, tj. div rot $\vec{V} = 0$.

Videli smo da je skalarna funkcija U (skalarni) potencijal vektorskog polja $\vec{V}$, ako je $\vec{V} = \text{grad}\ U$. Slično tome, vektorska funkcija $\vec{W}$ je *vektorski potencijal vektorskog polja $\vec{V}$, ako je $\vec{V} = rot\ \vec{W}$.*

Ako je potencijalno polje u isto vreme i solenoidno, tj. $\vec{V} = \text{grad}\, U$ i $\text{div}\, \vec{V} = \text{div grad}\, U = \Delta\, U = 0$, *polje* se zove *Laplasovo*. Skalarna funkcija tog polja ima naziv *harmonijske funkcije*.

Navedimo *tablicu pravila vektorske analize*.

Za zbirove: $\text{grad}\,(U_1 + U_2) = \text{grad}\, U_1 + \text{grad}\, U_2$,

$$\text{div}\,(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \text{div}\, \vec{V}_1 + \text{div}\, \vec{V}_2,$$

$$\text{rot}\,(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \text{rot}\, V_1 + \text{rot}\, V_2,$$

Za proizvode: $\text{grad}\,(U_1\, U_2) = U_1\, \text{grad}\, U_2 + U_2\, \text{grad}\, U_1$,

$$\text{div}\,(U\, \vec{V}) = U\, \text{div}\, \vec{V} + (\vec{V}\, \text{grad}\, U),$$

$$\text{rot}\,(U\, \vec{V}) = U\, \text{rot}\, \vec{V} + [\text{grad}\, U,\, \vec{V}],$$

$$\text{grad}\,(\vec{V}_1\, \vec{V}_2) = (\vec{V}_2\, \nabla)\, \vec{V}_1 + (\vec{V}_1\, \nabla)\, \vec{V}_2 + $$

$$+ [\vec{V}_1,\, \text{rot}\, \vec{V}_2] + [\vec{V}_2,\, \text{rot}\, \vec{V}_1],$$

$$\text{div}\,[\vec{V}_1\, \vec{V}_2] = \vec{V}_2\, \text{rot}\, \vec{V}_1 - \vec{V}_1\, \text{rot}\, \vec{V}_2,$$

$$\text{rot}\,[\vec{V}_1\, \vec{V}_2] = (\vec{V}_2\, \nabla)\, \vec{V}_1 - (\vec{V}_1\, \nabla)\, \vec{V}_2 +$$

$$+ \vec{V}_1\, \text{div}\, \vec{V}_2 - \vec{V}_2\, \text{div}\, \vec{V}_1.$$

Primena više operatora:

$$\text{rot grad}\, U = 0,\ \text{div rot}\, \vec{V} = 0,\ (\nabla\, \nabla) = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta\, U = (\nabla\nabla)\, U = \text{div grad}\, U,\ \Delta\, \vec{V} = (\nabla\, \nabla)\, \vec{V} = \text{grad div}\, \vec{V} -$$

$$-\text{rot rot}\, \vec{V},\ \Delta\,(U_1\, U_2) = U_1\, \Delta\, U_2 + U_2\, \Delta\, U_1 + 2\ \text{grad}\, U_1\ \text{grad}\, U_2.$$

$$\text{grad} f\, [U(\vec{r})] = \frac{df}{dU} \text{grad}\, U,\ \Delta\, f\, [U(\vec{r})] = \frac{df}{dU} \Delta\, U + \frac{d^2 f}{dU^2} (\text{grad} U)^2.$$

Slučajevi posebnih funkcija:

$$\Delta\, U^{\alpha} = \alpha\, U^{\alpha-2} \{U\, \Delta\, U + (\alpha - 1)\, (\text{grad}\, U)^2\},$$

$$\Delta \log U = \frac{1}{U}\, \Delta\, U - \left(\frac{\text{grad}\, U}{U}\right)^2,\quad \Delta\, e^U = e^U\, \{\Delta\, U + (\text{grad}\, U)^2\}.$$

Ako je $\vec{r}$ vektor položaja, $r = |\vec{r}|$, $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ i $\vec{A}$ konstantan vektor, onda je:

$$\text{grad}\, r = \vec{r}_0,\ \text{grad}\, (\vec{A}\, \vec{r}) = \vec{A},\ \text{grad}\, (r^{-1}) = -\frac{\vec{r}_0}{r^2},$$

$$\text{grad} f\, (r) = f'\, (r)\, \vec{r}_0,\ \text{div}\, \vec{r} = 3,\ \text{div}\, \vec{r}_0 = 2\, r^{-1},\ \text{div}\left(\frac{\vec{r}_0}{r^2}\right) = 0.$$

$$\text{div}\, [\vec{A}\, \vec{r}] = 0,\ \text{div}\, (f\, (r)\, \vec{r}_0) = 2 f\, (r) \cdot r^{-1} + f'\, (r),\ \text{rot}\, \vec{r} = 0,$$

$$\text{rot}\, [\vec{A},\, \vec{r}] = 2\vec{A},\ \text{rot}\, (f\, (r)\, \vec{r}) = 0.$$

$$(\vec{V}\nabla)\, \vec{r} = \vec{V},\quad \Delta\, (\vec{r}\, \vec{V}) = \vec{r}\, \Delta\, \vec{V} + 2\, \text{div}\, \vec{V},$$

$$\Delta\, (\vec{r}\, U) = \vec{r}\, \Delta\, U + 2\, \text{grad}\, U,$$

$$\text{rot}\, [\vec{r}\, \vec{V}] + \text{grad}\, (\vec{r}\, \vec{V}) = -\vec{V} + \vec{r}\, \text{div}\, \vec{V} + [\vec{r},\ \text{rot}\, \vec{V}],$$

$$\Delta\, f\, (r) = f''\, (r) + \frac{2}{r} f'\, (r),\quad \Delta \left(\frac{f(r)}{r}\right) = \frac{f''\, (r)}{r}.$$

U Teoriju polja spada još nekoliko integralnih teorema. Ove teoreme stavićemo u naredni paragraf, u kome se proučavaju primene integralnog računa na geometriju.

5.5. Primene integralnog računa na geometriju

U četvrtoj glavi (4.5 i 4.6) su uvedeni pojmovi određenih integrala, jednostrukog, dvostrukog i višestrukog. Navedimo sad važne primene tih integrala kad su njihovi diferencijalni elementi skalari, proizvodi skalara podintegralne funkcije i skalarnog diferencijala promenljive po kojoj se vrši integracija.

Određivanje dužine (rektifikacija) krive. Za ravnu krivu sa jednačinom $y=y(x)$, diferencijalni element luka ima oblik $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$ i prema tome imamo obrazac

$$L=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

gde je L dužina luka između tačaka na krivoj sa apscisama x_0 i x_1. Kad je kriva data jednačinama u parametarskom obliku $x=x(t)$, $y=y(t)$ ili u implicitnom obliku $F(x, y)=0$, prethodni obrazac dovodi do ovih obrazaca:

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,\quad L=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{F_y}\sqrt{F_x^2+F_y^2}\,dx.$$

Ako je kriva određena u polarnim koordinatama $r=r(\theta)$ imamo obrazac

$$L=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.\qquad \left(r'=\frac{dr}{d\theta}\right).$$

Rezultati za neke poznate krive:

1. Za *lančanicu* sa jednačinom $y=a\cosh\frac{x}{a}$ imamo

$$L=\int_0^x\cosh\frac{x}{a}=a\sinh\frac{x}{a}.$$

2. *Parabola* $y=\frac{x^2}{2p}$,

$$L=\frac{1}{p}\int_0^x\sqrt{x^2+p^2}\,dx=\frac{x}{2p}\sqrt{x^2+p^2}+\frac{p}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}.$$

3. *Astroida* sa jednačinama: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, celokupna dužina $=6a$.

4. *Cikloida* sa jednačinama: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, dužina jednog talasa $=8a$.

5. *Evolventa kruga* sa jednačinama: $x=a(t\sin t+\cos t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $L=\frac{1}{2}at^2$.

6. *Arhimedova spirala* sa jednačinom $r=a\theta$.

$$L=a\int_0^{\theta}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}+\log\left(\theta\sqrt{1+\theta^2}\right)\right].$$

7. *Logaritamska spirala* sa jednačinom $r=ae^{m\theta}$.

$$L=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\,(r-r_0).$$

8. *Elipsa* sa jednačinom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, posle prelaza na parametarske jednačine $x=a\sin t$, $y=a\cos t$, dovodi do *eliptičkog integrala druge vrste*:

$$L=a\int_0^t\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt=aE(e, t).$$

Celokupna periferija iznosi $L_E=aE(e)$. Broj $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, a $E(e)$ je *potpuni eliptički integral druge vrste* za koji postoje tablice.

9. Kardioida sa jednačinom $r=a(1+\cos\theta)$, $r'=-a\sin\theta$,

$$L=8a\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}=8a.$$

Za prostornu krivu čije su jednačine $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ imamo

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt.$$

Za druge forme jednačina prostorne krive lako je napisati potrebne obrasce prema obrascima za slučaj ravne krive. Za cilindarske koordinate, r, θ, z imamo

$$L=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

Rezultat za zavojnicu čije su jednačine: $r=\text{const}=a$, $z=h\theta$ glasi: $L=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{a^2+h^2}\,d\theta=\sqrt{a^2+h^2}\,(\theta-\theta_0)$. Za jedan zavoj imamo $L_{2\pi}=2\pi\sqrt{a^2+h^2}$.

Određivanje površine (kvadratura) slika u ravni. Kao što znamo, površina krivolinijskog trapeza, tj. oblasti ograničene dvema ordinatama, delom x ose između ordinata i delom krive $y=y(x)$ između istih ordinata, određuje se obrascem

$$Q=\int_a^b y(x)\,dx,$$

gde su a i b apscise krajnjih ($b>a$) ordinata. Funkcija $y(x)$ je neprekidna, pozitivna i jednoznačna na duži $[a, b]$. Obratimo pažnju, da je u slučaju $y<0$ površina ispod Ox ose negativna i prema tome gornji obrazac ne daje pravu vrednost površine ako Ox osa seče sliku na dva ili više delova.

Za površinu krivoliniskog trapeza sa parametarskim jednačinama krivolinijskog dela konture u obliku $x=x(t)$, $y=y(t)$ služi obrazac

$$Q=\int_{t_0}^{t_1} y(t)\,x'(t)\,dt.$$

U polarnim koordinatama r, θ, u kojima je površina elementarnog kružnog isečka $\frac{1}{2} r^2 d\theta$, imamo obrazac

$$Q=\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta$$

za površinu između dva potega $r(\theta_0)$ i $r(\theta_1)$ i date krive $r=r(\theta)$.

Površina ravne oblasti ograničene zatvorenom krivom može se računati i pomoću dvostrukog integrala

$$Q=\iint_Q dx\,dy.$$

Kvadratura krive površine. Neka je površina data jednačinama $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, gde su u, v Gausove koordinate tačke na površini, a jednačina granice oblasti određena jednačinom $\varphi(u, v)=0$. Pretpostavlja se da su funkcije $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ jednoznačne, neprekidne i imaju neprekidne delimične izvode i da u svakoj tački postoji određena normala.

Pošto smo pokazali (str. 167.) da element površine u Gausovim koordinatama ima vrednost $dQ=\sqrt{EG-F^2}du\,dv$, gde su E, F, G koeficijenti prve kvadratne forme, imamo obrazac za površinu oblasti D

$$Q=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

pri čemu jednačina $\varphi(u, v)=0$ služi za postavljanje granica integracije na koordinatnoj mreži za datu oblast D.

U slučaju Dekartovih koordinata, kad je jednačina površine $z=f(x, y)$ biće

$$Q=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy, \qquad \left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Površine nekih slika:

1. *Lančanice* $y=a\cos h\frac{x}{a}$. Trapez između ordinata za $x=0$ i $x=x$. $Q=\int_0^x a\cos h\frac{x}{a}=a^2\sin h\frac{x}{a}=as$, gde je s dužina krivolinijske strane trapeza.

2. *Eliptičkog trapeza* sa jednačinom krivolinijske strane $=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ i graničnim ordinatama za $x=0$ i $x=x$. $Q=\frac{ab}{2}$ arc sin $\frac{x}{a}+\frac{xy}{2}$. Celokupne elipse $Q=\pi ab$, kruga $Q=\pi r^2$.

3. *Hiperboličkog trapeza*, $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, krajnje ordinate za $x=a$ i $x=x>a$.

$$Q_1=\frac{1}{2}xy-\frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}=\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}ab\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Hiperboličkog sektora sa krajnjim tačkama $0(0,0)$, $A(a,0)$ prvog potega i $0(0,0), M(x,y)$ drugog potega:

$$Q_2=\frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{y}{b}.$$

Hiperboličkog trapeza sa osnovom na Oy osi i apscisama $x = a$, $x = x$; $Q_3 = \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} ab \log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$. Napomena: Jednačina kruga jediničnog poluprečnika $x = \cos t$, $y = \sin t$. Jednačine hiperbole $(x^2 - y^2 = 1)$ u parametarskom obliku: $x = \cosh t$, $y = \sin h\, t$. Geometrijsko tumačenje parametra t: za krug t je dvostruka vrednost površine kružnog isečka, kod hiperbole — dvostruka vrednost površine hiperboličkog sektora

$$2\, Q_2 = \log(x + y) = t.$$

Prema tome imamo $x + y = e^t$ i iz jednačine $x^2 - y^2 = 1$ za razliku $x - y = e^{-x}$, odakle je $x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \cos h\, t$, $y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sin h\, t$.

4. *Cikloide*: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. $Q = 3\pi a^2$.

5. Jednog zavoja *Arhimedove spirale* $r = a\theta$ u granicama od 0 do 2π. $Q = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{4}{3} \pi^3 a^2$, Arhimedov rezultat: Površina jednog zavoja Arhimedove spirale jednaka je trećini površine kruga poluprečnika $2\pi a$.

6. *Puža* čija je jednačina $r = a\cos\theta + a\,(b > a)$.

$Q = \frac{\pi}{2}(a^2 + 2b^2)$. Za *kardioidu* $(b = a)$ imamo $Q = \frac{3}{2} \pi a^2$.

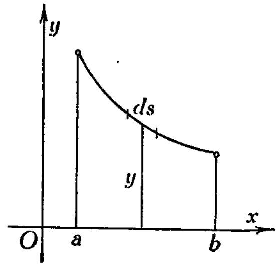
7. *Lemniskate* $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

$$Q = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta = 4a^2.$$

8. *Dekartovog lista* (omedjenog dela) čija je jednačina u polarnim koordinatama $r = 3a\sin\theta \cos\theta : (\sin^3\theta + \cos^3\theta)$ u granicama od 0 do $\pi/2$. $Q = \frac{3}{2} a^2$.

9. *Astroide* čije su jednačine: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. $Q = \frac{3}{8} \pi a^2$.

Kvadratura obrtnih površina. Neka se kriva u ravni Oxy (sl. 81) čija je jednačina $y = f(x)$ obrće oko Ox ose. Pravolinijski diferencijalni element luka te krive ds opisuje pravolinijsku površinu. Elementarna geometrija uči da je površina koju opisuje duž pri obrtanju oko ose, jednaka proizvodu te duži i obima kruga koji opisuje sredina duži. Pri tome se duž i osa obrtanja nalaze u istoj ravni i duž sa jedne strane od ose. U našem slučaju element dQ obrtne površine ima vrednost



Sl. 81 — Površina obrtnih tela

$$dQ = 2\pi y \cdot ds = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

a sama površina je određena obrascem

$$Q = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Lako je primeniti ovaj obrazac i na slučaj kad je jednačina izvodnice data u nekom drugom obliku.

Rezultati određivanja obrtnih površina.

1. *Sferni pojas* $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, gde je r poluprečnik sfere. $Q = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} r\, dx = 2\pi r(x_2 - x_1) = 2\pi r h$, gde je h visina pojasa. Površina lopte jednaka je $4\pi r^2$.

2. *Površina* pri obrtanju *luka lančanice* $y = a\cos h \frac{x}{a}$ sa krajevima u tačkama sa apscisama 0 i x.

$$Q = 2\pi \int_0^x \cos h^2 \frac{x}{a}\, dx = \pi a\left(x + \sin h \frac{x}{2} \cdot \cos h \frac{x}{a}\right) = \pi a\left(x + \frac{1}{2} \sin h \frac{2x}{a}\right).$$

3. Površina od obrtanja *astroide*:

$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. $Q = \frac{12}{5} \pi a^2$.

4. Površina od obrtanja *cikloide*:

$$x=a\,(t-\sin t),\quad y=a\,(1-\cos t).\quad Q=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

5. Površina od obrtanja *kardioide* $r=a\,(1+\cos\theta)$ oko polarne ose. Pošto za obrtanje krive u polarnim koordinatama oko polarne ose važi obrazac

$$Q=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\,(\theta).\ \sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

u našem slučaju sa granicama $\theta_1=0,\ \theta_2=\pi$ imamo $Q=\frac{32}{5}\pi a^2$.

6. Na sličan način za *lemniskatu* $r^2=2\,a^2\cos 2\theta$ imamo

$$Q=8\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

7. Površina obrtnog *elipsoida*: a. *izduženog* i b. *spljoštenog*.

a. $Q=2\pi b\left(b+\frac{a}{e}\operatorname{arc\,sin} e\right)$, gde je $e^2=(a^2-b^2):a^2$ $(a>b)$. Osa obrtanja je $2\,a$ osa.

b. $Q=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2\,a}\cdot\frac{1}{e}\cdot\log\frac{1+e}{1-e}\right)$, gde je ponovo $a>b$, ali obrtanje se vrši oko $2\,b$ ose.

8. Površina *obrtnog paraboloida* oko Ox ose. Jednačina parabole koja prolazi kroz tačku (a, b) glasi $y=b\sqrt{\frac{x}{a}}$. Dεo izvodnice je od početka koordinata do tačke sa apscisom $x=a$.

$$Q=\frac{1}{6}\pi\frac{b}{a^2}\left[(4\,a^2+b^2)^{3/2}-b^3\right].$$

Zapremina obrtnih tela. Kad se površina krivolinijskog trapeza u ravni Oxy sa osnovom na Ox osi i krivolinijskom stranom $y=f\,(x)$ obrće oko Ox ose, ona obrazuje obrtno telo. Bočnu obrtnu površinu tog tela smo označavali sa Q. Zapreminu tog tela, omeđenog površinom Q i kružnim stranama označimo sa V. Diferencijalni element tog tela dV je kružna ploča visine dx i poluprečnika kruga y i prema tome

$dV=\pi y^2 dx$, a celokupna zapremina takvog obrtnog tela se izražava obrascem

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Rezultati određivanja zapremine obrtnih tela:

1. Zapremina *zarubljene kupe* od obrtanja trapeza $A'B'BA$ sa ovim koordinatama temena $A'\,(0, r)$, $B'\,(h, R)$, $B\,(h, 0)$, $A\,(0, 0)$.

$$V=\pi\int_0^h (r+kx)^2\,dx,\ \text{gde je}\ k=\frac{R-r}{h},\quad V=\frac{\pi h}{3}(r^2+R^2+rR).$$

2. *Elipsoida*. Elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ obrće se oko Ox ose. $V=\frac{4}{3}\pi ab^2$. Ista elipsa oko Oy ose. $V=\frac{4}{3}\pi a^2 b$. Za loptu $(a=b=r)$ imamo $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

3. Zapremina tela sa obrtnom površinom od obrtanja *lančanice* $y=a\cos h\frac{x}{a}$ oko Ox ose u granicama od 0 do x.

$$V=\frac{1}{2}\pi a^2\left(x+\frac{a}{2}\sin h\frac{2x}{a}\right).$$

4. Zapremina tela sa obrtnom površinom od obrtanja *cikloide*:

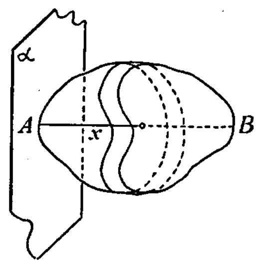
$$x=a\,(t-\sin t),\ y=a\,(1-\cos t)$$

u granicama

$$0<t<2\pi.\quad V=5\pi^2 a^3.$$

5. Isto za astroidu

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.\quad V=\frac{32}{105}\pi a^3.$$



Sl. 82 — Paralelni preseci tela

Zapremina tela sastavljena od ploča. Element takvog tela je ploča (sl. 82) ograničena dvama paralelnim presecima na rastojanju dx i uzanim delom površine tela. Ako površinu

preseka na rastojanju x od ravni α označimo sa $Q(x)$, element zapremine je jednak $Q(x)\,dx$, a sama zapremina se izražava integralom $V=\int_a^b Q(x)\,dx$. Nije mesto ovde za izlaganje analitičkih uslova za primenu navedenog obrasca. Posmatranje konkretnog objekta uvek potvrđuje tačnost postupka.

Rezultati:

1. Odrediti zapreminu pravilne kvadratne *piramide* visine h. Neposredno imamo $Q(x)=a^2x^2/h^2$, gde je a strana kvadrata osnove i prema tome je $V=\frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{1}{3}a^2h$.

2. Zapremina *troosnog elipsoida*. Pošto na rastojanju x imamo $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $z=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, površina eliptičkog preseka iznosi $Q(x)=\pi\frac{bc}{a^2}(a^2-x^2)$. Prema tome imamo

$$V=2\int_0^a Q(x)\,dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

3. Zapremina *eliptičkog hiperboloida* sa jednačinom površine $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Pošto na rastojanju z imamo u preseku elipsu sa poluosama $\frac{a}{c}\sqrt{c^2+z^2}$ i $\frac{b}{c}\sqrt{c^2+z^2}$ i sa površinom $Q(z)=\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$, zapramina tela između dve površine $z=h$ i $z=-h$ iznosi $V=2\pi abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$.

Izračunavanje zapremine tela proizvoljne forme. Ako je površina tela takva da u Dekartovom koordinatnom sistemu prave paralelne Oz osi seku tu površinu s jedne strane prema jednačini $z_2=f_2(x,y)$, a sa druge strane prema jednačini

$z_1=f_1(x,y)$, pri čemu $z_2>z_1$, zapremina tela se izražava razlikom dva dvostruka integrala:

$$V=\iint_D f_2(x,y)\,dx\,dy-\iint_D f_1(x,y)\,dx\,dy,$$

gde je D oblast u ravni Oxy projekcije tela na tu ravan.

Zapremina tela u Dekartovom sistemu koordinata, u sistemu polarno-cilindarskih koordinata i u sistemu sfernih koordinata može se odrediti i pomoću ovih trostrukih integrala:

$$V=\iiint_V dx\,dy\,dz,\quad V=\iiint_V r\,dz\,dr\,d\theta,\quad V=\iiint_V \rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

5.51. Iz Geometrije masa

Pojam gustine kontinuirano raspoređenih masa. Odnos $\frac{\Delta m}{\Delta V}$, gde je ΔV zapremina, a Δm masa u toj zapremini, je *srednja gustina tela* u zapremini ΔV. $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}$ je *gustina tela u datoj tački M*, koja uvek pripada zapremini ΔV. Ako se takva gustina označi sa σ, imamo $\sigma=\frac{dm}{dV}$. U opštem slučaju gustina σ je funkcija položaja tačke M u datom telu, tj.

$$\sigma=f(M)=f(\vec{r})=f(x,y,z).$$

Ako je gustina data za sve tačke zapremine V masa tela m se određuje integralom $m=\iiint_V \sigma\,dV=\iiint_V \sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ proširenim na sve tačke tela. Ako je masa tela raspoređena po nekoj površini (lim, ploča, korica,...), odnos $\frac{\Delta m}{\Delta A}$ je srednja površinska gustina na površini ΔA, a

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta A}=\sigma_1=\frac{dm}{dA}$$

je *površinska gustina u datoj tački M*. Analogno,

$$\sigma_2 = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \sigma_2 = \frac{dm}{dl}$$

je *linijska gustina*, recimo, date žice u datoj tački. Dimenzije: $[\sigma] = ML^{-3}$, $[\sigma_1] = ML^{-2}$, $[\sigma_2] = ML^{-1}$. Određivanje mase materijalne površine:

$$m = \iint_A \sigma_1(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = \iint_A \sigma_1(x,y)\,dx\,dy,$$

linije: $m = \int_L \sigma_2(l)\,dl = \int_L \sigma_2(s)\,ds$. Ako su $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$, stalne veličine, telo je *homogeno*, na suprot *nehomogenom* ili *heterogenom*, kad su gustine promenljive. Za homogena tela važe obrasci: $m = \sigma V$, $m = \sigma_1 A$. $m = \sigma_2 L$.

Centar masa. U Mehanici se uvodi pojam *centra masa* materijalnog sistema diskretno ili kontinuirano raspoređenih masa pomoću ovih vektorskih jednačina

$$m\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \qquad m\vec{r}_c = \iiint_V \vec{r}\,dm = \iiint_V \sigma\vec{r}\,dV,$$

gde su: $m_i \vec{r}_i$ *vektor položaja i-te* materijalne tačke *opterećen masom* te tačke, tačka C je centar masa sistema, m je celokupna masa sistema, tj. $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ ili $m = \iiint_V dm$.

Prema tome koordinate centra masa su:

$$x_c = \frac{\iiint_V x\,dm}{m}, \quad y_c = \frac{\iiint_V y\,dm}{m}, \quad z_c = \frac{\iiint_V z\,dm}{m}.$$

Ako je telo homogeno, položaj centra masa ne zavisi od gustine, koordinate centra su:

$$x_c = \frac{\iiint_V x\,dV}{V}, \quad y_c = \frac{\iiint_V y\,dV}{V}, \quad z_c = \frac{\iiint_V z\,dV}{V}.$$

Slični obrasci određuju položaj centra masa raspoređenih po površini i duž linije, bilo homogeno ili heterogeno.

U vezi sa pojmom centra masa navedimo dve tzv. *Pappos-Guldin'ove teoreme.*

Prva teorema glasi: *Površina koja se dobiva obrtanjem luka krive linije u ravni oko ose u toj ravni, koja ne seče tu krivu, jednaka je proizvodu dužine luka i obima kruga što ga opiše centar masa tog luka.*

Druga teorema: *Zapremina koja se dobiva obrtanjem ravne površine oko ose u toj ravni, koja ne seče tu površinu, jednaka je proizvodu veličine te površine i obima kruga što ga opiše centar masa te površine.*

Aksijalni kvadratni moment inercije.

Zbir proizvoda mase svake materijalne tačke sistema i kvadrata rastojanja te tačke od prave (ose) zove se aksijalni kvadratni moment inercije ili kratko moment inercije datih masa oko te prave (ose). Ako sa d_i označimo rastojanje mase m_i od ose sa jediničnim vektorom $\vec{u}$, a sa J_u moment inercije oko te ose, imamo $J_u = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$.

Za neprekidno raspoređene mase zbirovi se zamenjuju integralima. Tako imamo:

$$J_u = \iiint_V \sigma d^2\,dV, \qquad J_u = \iint_A \sigma_1 d^2\,dA, \qquad J_u = \int_L \sigma_2 d^2\,dl.$$

Naročito su važni momenti inercije oko osa Dekartovih koordinata tj.

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2), \qquad J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i^2 + x_i^2),$$

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Za mase neprekidno raspoređene po zapremini V imamo

$$J_x = \iiint_V \sigma(x, y, z)(y^2+z^2)\,dV, \quad J_y = \iiint_V \sigma(x, y, z)(z^2+x^2)\,dV,$$

$$J_z = \iiint_V \sigma(x, y, z)(x^2+y^2)\,dV.$$

5.52. *Neki integrali i teoreme iz Teorije polja*

U vezi sa diferencijalnim pojmovima iz Teorije polja u 5.4 naveli smo neke linijske i površinske integrale, koji su od naročite važnosti. Ovde ćemo dopuniti tablicu takvih integrala i drugim integralima koji se upotrebljavaju u Teoriji polja.

Izostavljajući pojmove integrala linijskog, površinskog i zapreminskog od proizvoda podintegralne funkcije i diferencijalnog elementa, u skalarnom obliku, posmatraćemo samo integrale, kod kojih pod znakom integrala učestvuju i vektori.

Sa vektorima imamo tri vrste linijskih integrala i to:

$$(I_1)\ \int_L U\,d\vec{r} \text{ — vektor}; \quad (I_2)\ \int_L (\vec{V}\,d\vec{r}) \text{ — skalar};$$

$$(I_3)\ \int_L [\vec{V}\,d\vec{r}] \text{ — vektor}$$

i tri vrste površinskih integrala

$$(II_1)\ \iint_Q U\,\vec{dQ} \text{ — vektor}; \quad (II_2)\ \iint_Q (\vec{V}\,d\vec{Q}) \text{ — skalar};$$

$$(II_3)\ \iint_Q [\vec{V}\,d\vec{Q}] \text{ — vektor.}$$

(I_1) je krivolinijski integral skalarne funkcije U duž orijentisane krive L. Ovaj integral se računa ovako. Uzimaju se jednačine krive L, recimo, u parametarskom obliku

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t).$$

Tada imamo ovaj obrazac za izračunavanje:

$$\int_L U\,d\vec{r} = \vec{i}\int_{t_0}^{t_1} U(t)\cdot x'(t)\,dt + \vec{j}\int_{t_0}^{t_1} U(t)\cdot y'(t)\,dt + \vec{k}\int_{t_0}^{t_1} U(t)\,z'(t)\,dt.$$

Ako se krivolinijski integral uzima po zatvorenoj krivoj u određenom smeru (pozitivnom, u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku) upotrebljava se i naročiti znak integrala sa kružićem $\oint_L U\,d\vec{r}$. Sa promenom smera integracije znak integrala se menja.

(I_2) je krivolinijski integral skalarnog proizvoda vektorske funkcije polja $\vec{V}$ i elementarnog pomeranja $d\vec{r}$ na krivoj L. Zove se *tok vektora* $\vec{V}$ *duž krive* L. Ako je kriva L zatvorena integral izražava *cirkulaciju vektora* $\vec{V}$. Isti integral predstavlja i *rad vektora* $\vec{V}$ *(sile)* na putu L.

(I_3) je krivolinijski integral vektorskog proizvoda vektorske funkcije polja $\vec{V}$ i elementarnog pomeranja $d\vec{r}$ na krivoj L. Izračunava se prema obrascu:

$$\int_L [\vec{V}\,d\vec{r}] = \vec{i}\int_L (V_y\,dz - V_z\,dy) + \vec{j}\int_L (V_z\,dx - V_x\,dz) + \\ + \vec{k}\int_L (V_x\,dy - V_y\,dx),$$

pri čemu se sve podintegralne funkcije izražavaju u funkciji samo jedne promenljive, bilo parametra t, ili, recimo, promenljive x, ako je kriva određena jednačinama $y = y(x)$, $z = z(x)$.

Za površinske integrale vektor $\vec{dQ}$ označava vektor $\vec{n_0}\,dQ$, gde je $\vec{n_0}$ jedinični vektor normale na površini, a dQ element površine, tj. $dQ = dA$ (area—površina).

(II_1) je površinski integral skalarne funkcije U po orijentisanoj površini sa elementom

$$\vec{n_0}\,dQ = (\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma)\,dQ =$$
$$= \vec{i}\,dy\,dz + \vec{j}\,dz\,dx + \vec{k}\,dx\,dy = \vec{n_0}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

u zavisnosti od načina izračunavanja tog integrala.

(II_2) i (II_3) su površinski integrali, prvi je skalar, drugi vektor. Prvi integral se zove *proticanje (flux) vektora* $\vec{V}$ kroz površinu Q. Izračunavanje tih integrala se vrši prema ranije pokazanom načinu.

Zapreminski integrali se upotrebljavaju u Teoriji polja samo u dvema formama

$$\underset{v}{\iiint} U\,dv \quad \text{i} \quad \underset{v}{\iiint} \vec{V}\,dv.$$

O prvom integralu kao običnom trostrukom integralu se govori samo tada kad u formiranju skalarne podintegralne funkcije učestvuju vektorske operacije.

Što se tiče drugog, vektorskog integrala njegovo izračunavanje ne zahteva ništa novo prema ranije izloženom.

Nabrojimo sad nekoliko teorema o transformaciji integrala jedne prirode u integral druge prirode.

Grin — Gaus — Ostrogradskog teorema

$$\underset{v}{\iiint} \operatorname{div} \vec{V}\,dv = \underset{Q}{\oiint} (\vec{V}, \vec{n_0})\,dQ;$$

Stokcova teorema

$$\underset{Q}{\iint} (\operatorname{rot} \vec{V}, \vec{n_0})\,dQ = \underset{L}{\oint} (\vec{V}\,d\vec{r})$$

Grinove:

1. $$\underset{v}{\iiint} \{U_1 \Delta U_2 + (\operatorname{grad} U_1 \operatorname{grad} U_2)\}\,dv = \underset{Q}{\oiint} (U_1 \operatorname{grad} U_2, \vec{n_0})\,dQ;$$

2. $$\underset{v}{\iiint} (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1)\,dv = \underset{Q}{\oiint} (\{U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1\}, \vec{n_0})\,dQ,$$

3. $$\underset{v}{\iiint} \Delta U\,dv = \underset{Q}{\oiint} (\operatorname{grad} U, \vec{n_0})\,dQ.$$

Specijalni slučajevi:

$$\underset{v}{\iiint} \operatorname{grad} U\,dv = \underset{Q}{\oiint} U\vec{n_0}\,dQ, \quad \underset{v}{\iiint} \operatorname{rot} \vec{V}\,dv = \underset{Q}{\oiint} [\vec{V}, \vec{n_0}]\,dQ,$$

$$\underset{Q}{\oiint} (\operatorname{rot} \vec{V}, \vec{n_0})\,dQ = 0.$$

U vezi sa integralnim teoremama možemo postaviti ove prirodne definicije vektorskih pojmova: gradijenta, divergencije i rotora

$$\operatorname{grad} U = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\underset{Q}{\oiint} U\vec{n_0}\,dQ}{\Delta v}, \quad \operatorname{div} \vec{V} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\underset{Q}{\oiint} (\vec{V}, \vec{n_0})\,dQ}{\Delta v},$$

$$\operatorname{rot} V = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\underset{Q}{\oiint} [\vec{V}, \vec{n_0}]\,dQ}{\Delta v},$$

Prema vrednostima invarijanata divergencije i rotora vektorska polja se razlikuju ovako:

1. $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$, bezizvorno i bezvrtložno, *Laplasovo polje*;
2. $\operatorname{div} \vec{V} \neq 0$, $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$, bezvrtložno, *potencijalno polje*;
3. $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{V} \neq 0$, bezizvorno, *solenoidno polje*;
4. $\operatorname{div} \vec{V} \neq 0$, $\operatorname{rot} \vec{V} \neq 0$, *složeno polje*.

Ovi uslovi polja se odnose samo na malu oblast, tako reći „u malom" oko date tačke. Za konačnu oblast uslovi treba da budu ispunjeni u svim tačkama polja, to su uslovi „u velikom",

5.6. Stieltjes-ov integral

Neka je: 1. *funkcija* $f(x)$ *ograničena* u razmaku (a, b), tj. postoji konačan broj M takav da je $|f(x)| < M$ za svako $a < x < b$ i 2. *funkcija* $\alpha(x)$ *ograničene varijacije* u tom razmaku, tj. zbir $\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})|$ ostaje ograničen za svaku podelu $\{x_\nu\}$ tog razmaka.

Uzmimo zbir

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,[\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})],$$

gde je: $f(x)$ ograničena funkcija u razmaku (a, b) i ξ_ν neka vrednost argumenta u intervalu $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ i $\alpha(x)$ funkcija ograničene varijacije u istom razmaku (a, b). Sa δ_n označimo dužinu najvećeg od razmaka $(x_{\nu-1}, x_\nu)$.

Ako pod uslovom $\delta_n \to 0$ zbir S_n konvergira određenoj graničnoj vrednosti i to nezavisno od rasporeda tačaka $\{x_\nu\}$ i izbora tačaka ξ_ν, ta granična vrednost S zove se *Stieltjes-ov integral funkcije* $f(x)$ *u odnosu na funkciju* $\alpha(x)$ i piše

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] =$$

$$= \int_a^b f(x)\, d\{\alpha(x)\} = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

Običan Rimanov određeni integral može se smatrati kao poseban slučaj Stieltjes-ovog integrala kad je $\alpha(x) \equiv x$.

U slučaju kad je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$, a funkcija $\alpha(x)$ ima ograničen integrabilni izvod $\alpha'(x)$, Stieltjes-ov integral ce izračunava, prema obrascu

$$S = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, dx,$$

kao običan određeni integral.

Kad funkcije $f(x)$ i $\alpha(x)$ ne zadovoljavaju navedene uslove, metodu izračunavanja treba dopuniti, ali to zahteva dublje proučavanje predmeta.

Stieltjes-ovi integrali nalaze sad široku primenu kako u matematici, tako i u primenjenim naukama. Njima su posvećeni mnogobrojni specijalni radovi, oni nalaze svoje mesto i u opštim matematičkim udžbenicima. U našoj literaturi postoji vrlo dobra monografija pod naslovom „Teorija i praksa Stieltjes-ova integrala" od *J. Karamate.*

Glava šesta

KALKULATIVNI PROCESI

6.1. Determinante

Kvadratna matrica n-toga reda je tablica od n^2 brojeva za koju usvajamo oznaku

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix} = \| a_{ij} \|.$$

Brojevi a_{ij} su *elementi matrice;* posmatraćemo matrice samo sa realnim elementima. Prvi indeks oznake a_{ij} pokazuje numeru *vrste* kojoj pripada element, a drugi numeru *kolone.*

Uzimajući ovu tablicu za matematički objekt potrebno je utvrditi koje matematičke operacije možemo vršiti sa ovom matricom i koje brojne vrednosti možemo dobiti u rezultatu tih operacija. Na tim osnovama stvara se *Teorija matrica.**)

U toj teoriji se od kvadratne matrice obrazuje matematički objekt—*determinanta* matrice, koji je uveo *Lajbnic* pre postojanja pojma matrice. Prvo navedimo oznaku determinante, a zatim i pravilo za određivanje njene brojne vrednosti.

*) Vidi: T. P. Anđelić. Matrice. B. 1962 g.

Detirminanta n-toga reda označuje se ovako

$$\det \| a_{ij} \| = | a_{ij} | = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Prema Laplasovom rezultatu brojnu vrednost svake determinante možemo odrediti ovako. Uzmimo bilo koji element determinante a_{ij} i izostavimo onu vrstu i onu kolonu kojoj pripada taj element; ostali elementi sačinjavaju determinantu n-1-toga reda. Ta determinanta sa znakom izraza $(-1)^{i+j}$ zove se *algebarska dopuna* (ili *kofaktor*) *elementa* a_{ij}. Označimo je sa $\bar{a}_{ij}$. *Laplasovo pravilo* se izražava ovako

$$(1) \qquad | a_{ij} | = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \bar{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{a}_{ij},$$

pri čemu se u prvom zbiru proizvodi odnose samo na elemente j-te kolone, a u drugom zbiru samo na elemente i-te vrste. Prvo pokažimo primenu tog pravila:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) +$$
$$+ a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}),$$

pri čemu smo determinante drugoga reda razvili takođe po Laplasovom pravilu. Datu determinantu trećega reda razvili smo po elementima prve vrste. Na ovom konkretnom primeru možemo potvrditi Laplasovo pravilo da se vrednost determinante neće promeniti ako se determinanta razvija po elementima neke druge vrste ili neke druge kolone. Uzmimo, napr., elemente druge kolone. Imamo

$$| a_{ij} | = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{22} (a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}) -$$
$$- a_{32} (a_{11} a_{23} - a_{13} a_{21}).$$

Vidimo da smo dobili isti zbir članova samo sa drugim redom sabiraka, naime članovi su došli ovim redom: u prvom izrazu prvi član odgovara 3-ćem, 2—5, 3—1, 4—2, 5—6, 6—4.

Primetimo da se iz Laplasovog pravila (1) samo jedan obrazac, recimo,

$$| a_{ij} | = a_{11} \bar{a}_{11} + a_{12} \bar{a}_{12} + a_{13} \bar{a}_{13} + \ldots + a_{1n} \bar{a}_{1n}$$

može uzeti kao definicija determinante; sve ostale forme tog pravila mogu biti izvedene iz prvog.

Navedimo sad osnovna svojstva determinanata.

1. Vrednost determinante se ne menja ako sve vrste zamenimo kolonama u istom rasporedu.

2. Determinanta menja samo znak, ako se razmene mesta dve vrste ili dve kolone.

3. Determinanta je jednaka nuli, ako su 1. svi elementi jedne vrste ili kolone jednaki nuli, 2. svi elementi jedne vrste ili kolone jednaki ili proporcionalni odgovarajućim elementima druge vrste ili kolone.

4. Množilac koji je zajednički svim elementima jedne vrste ili jedne kolone može se izneti ispred znaka determinante.

5. Determinanta ne menja svoju vrednost ako se elementima jedne vrste (ili kolone) doda ili oduzme isti multiplum odgovarajućih elemenata druge vrste (ili kolone).

6. Za *sabiranje determinanata* važi ovo pravilo:

Dve determinante sa različitim elementima samo u jednoj vrsti (ili koloni) mogu se sabrati na taj način da se saberu elementi samo u vrsti (ili koloni) različitih elemenata, a svi ostali elementi ostaju na svojim mestima i u determinanti-zbiru.

7. *Množenje determinanata* se vrši obično prema ovom pravilu: $| a_{ij} | \cdot | b_{ij} | = | c_{ij} |$, gde je $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, tj. zbir proizvoda svakog elementa i-te vrste odgovarajućim elementom j-te kolone.

8. Za probno proveravanje rezultata izračunavanja determinante na osnovu Laplasovog pravila možemo uzeti ovu osobinu svake determinante. Zbir proizvoda elemenata jedne vrste (ili kolone) i dopuna elemenata neke druge vrste (ili kolone) uvek je jednak nuli. Kao primer, uzmimo zbir proiz-

voda elemenata druge vrste i dopuna elemenata prve vrste za navedeni primer determinante trećega reda:

$$a_{21}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{22}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{23}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\equiv 0.$$

6.2. *Rešavanje sistema linearnih jednačina. Kramerova metoda*

Uzmimo sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n&=b_n, \end{aligned}$$

koji kratko možemo napisati i ovako

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Kramerove formule za rešenje tog sistema izgledaju ovako

$$x_i=D_i/D \quad (i=1,2,\dots,n)$$

gde je D *glavna determinanta sistema* sa vrednošću

$$D=|a_{ij}|, \quad \text{a } D_i \ (i=1,2,\dots,n)$$

su tzv. *determinante rešenja*, koje se dobivaju kad se u glavnoj determinanti kolona koeficijenata

$$\begin{matrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{ni} \end{matrix} \quad \text{zameni kolonom slobodnih članova} \quad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{matrix}$$

Npr. $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_2 & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_n & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$ itd.

Ako je $D\neq 0$, sistem ima određeno rešenje. Ako je $D=0$, sistem je ili protivurečan ($D_i\neq 0$) ili neodređen ($D_i=0$), tj. ima mnogo beskrajno rešenja.

U opštem slučaju sistema od m linearnih jednačina sa n nepoznatih bilo da je m jednako n ili ne imamo

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1, 2, \dots, m)$$

Za dublje proučavanje takvog sistema treba uzeti u obzir dve pravougle matrice

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad B=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$$

Sad je potrebno iskoristiti pojam *ranga matrice*.

Od matrice se može obrazovati više determinanata matrice nekog k-tog reda od k elemenata neke vrste i k elemenata odgovarajućih kolona na istim vrstama; svaki element matrice je determinanta prvoga reda matrice. Za matricu se kaže da je r-toga ranga, ako od determinanata matrice r-toga reda postoji makar jedna različita od nule, a sve matrične determinante većeg reda jednake su nuli. Sad se može formulisati stav o karakteru rešenja sistema jednačina (1).

Sistem m linearnih jednačina sa n nepoznatih neprotivurečan je tada i samo tada kad je rang matrice A jednak rangu matrice B. Ako je $r=n$, imamo n nezavisnih jednačina, čija je glavna determinanta različita od nule i Kramerova metoda daje određeno rešenje. Ako je $r<n$, biramo r jednačina sa glavnom determinantom r-toga reda i sa r nepoznatih; ostale promenljive prebacujemo na desnu stranu i izražavamo u Kramerovom rešenju r nepoznatih kao funkcije ostalih promenljivih, kao proizvoljnih parametara. To rešenje zadovoljava ostalih $n-r$ jednačina identično.

Zaustavimo se još na slučaju sistema linearnih homogenih jednačina oblika

$$(2) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n&=0, \end{aligned}$$

koji uvek ima tzv. *trivijalno rešenje* $x_i=0$ $(i=1, 2, \dots, n)$.

Ako matrica A tog sistema ima rang $r=n$, tj. glavna determinanta D sistema nije jednaka nuli, sistem ima samo trivijalno rešenje. Ako je $r<n$, iz sistema (2) se izdvaja sistem od r jednačina sa onih r nepoznatih za koji je glavna determinanta r-toga reda različita od nule, a sve ostale nepoznate se prebacuju na desnu stranu. Posle toga se sa dobivenim sistemom jednačina postupa na isti način kao i sa sistemom (1). Rešenje r jednačina po Kramerovom postupku zadovoljava identično ostalih $n-r$ jednačina.

6.21. Gausova metoda

Pošto se Gausova metoda uzastopne eliminacije nepoznatih pokazala kao neizmerno bolja u elektronskoj računskoj tehnici, pokazaćemo suštinu te metode na primeru sistema sa tri linearne jednačine.

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_1=0, \qquad \big|\, a_{21}:a_{11} \;\big|\, a_{31}:a_{11}\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_2=0,\\ &a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_3=0. \end{aligned}$$

Da bismo eliminisali nepoznatu x_1 iz druge i treće jednačine pomoću prve jednačine pomnožimo prvu sa $a_{21}:a_{11}$ i rezultat oduzmimo od druge jednačine; zatim pomnožimo prvu jednačinu sa $a_{31}:a_{11}$ i rezultat oduzmimo od treće, pa ćemo dobiti jednačine bez nepoznate x_1:

$$\left(a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2+\left(a_{23}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3+\left(a_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_1\right)=0,$$

$$\left(a_{32}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2+\left(a_{33}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3+\left(a_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_1\right)=0.$$

Kratko ćemo novi sistem ovako napisati:

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} &a^{(1)}_{22}x_2+a^{(1)}_{23}x_3+a_2^{(1)}=0, \qquad \big|\, a^{(1)}_{32}:a^{(1)}_{22}\\ &a^{(1)}_{32}x_2+a^{(1)}_{33}x_3+a^{(1)}_3=0. \end{aligned}$$

Sa ovim sistemom izvršimo operaciju eliminisanja x_2; dobićemo jednačinu

$$\text{(III)}\qquad a^{(2)}_{33}x_3+a^{(2)}_3=0.$$

Tako smo, posle izvršenih transformacija, došli do novog sistema jednačina

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_1=0,\\ &\text{(II)} && a^{(1)}_{22}x_2+a^{(2)}_{23}x_3+a^{(1)}_2=0,\\ &\text{(III)} && a^{(2)}_{33}x_3+a^{(2)}_3=0. \end{aligned}$$

sa stepenastom determinantom

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a^{(1)}_{22} & a^{(1)}_{23}\\ 0 & 0 & a^{(2)}_{33} \end{vmatrix}.$$

Sistem jednačina (I), (II), (III) odmah daje rešenje: iz jednačine (III) deljenjem određujemo x_3 i, kad tu vrednost stavimo u jednačinu (II), posle sabiranja novo deljenje daje x_2, zatim, posle sličnih operacija, jednačina (I) daje nepoznatu x_1.

6.3. Algebarske jednačine

Jednačina oblika

$$\text{(1)}\quad f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

je algebarska jednačina. Proučavamo jednačine sa realnim koeficijentima. Jednačine sa racionalnim koeficijentima možemo svesti na jednačine sa celim koeficijentima. Jednačinu sa $a_n\neq 1$ uvek možemo svesti na jednačinu *normalnog oblika* kad je $a_n=1$.

Funkcija $f(x)$, kao polinom po x, označava se i ovako $P(x)$ ili sa $P_n(x)$, kad je potrebno naglasiti stepen n polinoma.

Broj a za koji važi identitet $P(a)\equiv 0$ zove se *koren jednačine* (1) ili *nula polinoma*, odnosno funkcije $f(x)$. Ako je a koren jednačine (1), polinom $f(x)$ je deljiv sa $(x-a)$.

Ako je polinom $f(x)$ deljiv sa $(x-a)$ samo na prvom stepenu, koren a je prost koren. Ako je taj polinom deljiv sa $(x-a)^k$, a nije deljiv sa $(x-a)^{k+1}$, broj a je *višestruki koren* k-tog stepena ili k-tog reda date jednačine.

Ako jednačina sa realnim koeficijentima ima kompleksni koren $\alpha+\beta i$, ona mora imati i koren u obliku konjugovanog kompleksa, tj. $\alpha-\beta i$. Polinom $f(x)$ je tada deljiv sa kvadratnom funkcijom $(x-\alpha)^2+\beta^2$. Ako postoji koren $\beta i\,(\alpha=0)$, polinom $f(x)$ je deljiv sa $x^2+\beta^2$.

Svaka algebarska jednačina n-tog stepena ima n korena (*Gausova teorema*). Pri tome se svaki k-struki koren računa kao k korena. Ako jednačina (1) ima samo n prostih korena $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funkciju $f(x)$ možemo predstaviti u obliku

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Ako su x_1 i x_2 višestruki koreni reda k_1 i k_2 imamo

$$f(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}f_1(x),$$

pri čemu normalni polinom $n-k_1-k_2$ stepena $f_1(x)$ nije više deljiv ni sa $x-x_1$ ni sa $x-x_2$.

Ako polinom $f(x)$ u normalnom obliku ima n korena $x_1, x_2, \ldots x_n$, između koeficijenata polinoma i korena postoje ove *Kardanove jednačine* (*G. Cardano* 1501—1576):

$$a_{n-1}=-(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

$$a_{n-2}=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_2x_3+x_2x_4+\cdots+x_{n-1}x_n,$$

$$a_{n-3}=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n),$$

$$\vdots$$

$$a_0=(-1)^n x_1x_2\cdots x_n.$$

Rešenje kvadratne jednačine. 1. Normalnog oblika $x^2+px+q=0$. Rešenje $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. 2. Opšteg oblika $ax^2+bx+c=0$. Rešenje

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+(a-c)^2-(a+c)^2}}{2a}.$$

3. Oblika $ax^2+2\beta x+c=0$. Rešenje $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-ac}}{a}$. Ako je 1. $b^2>4ac\,(p^2>4q, \beta^2>ac)$, koreni su realni i različiti; 2. $b^2=4ac\,(p^2=4q, \beta^2=ac)$, koreni su jednaki: $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$, $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\beta}{a}\right)$. Leva strana jednačine je potpuni kvadrat: $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0$. 3. $b^2<4ac\,(p^2<4q, \beta^2<ac.)$ Koreni su kompleksni, konjugovani. Zbir korena je:

$$x_1+x_2=-p=-\frac{b}{a}=-\frac{2\beta}{a};\ \text{proizvod je: } x_1x_2=q=c/a.$$

Kubna jednačina $ax^3+bx^2+cx+d=0$ posle smene

$$x=y-\frac{b}{3a}$$

uzima oblik

$$y^3+py+q=0,$$

gde je

$$p=\left(\frac{c}{a}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2,\quad q=\frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{d}{a}\right).$$

Ako je $\Delta=\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}>0$, jednačina ima jedan realan koren i dva kompleksna imaginarna:

$$y_1=u+v;\quad y_2=-\frac{1}{2}(u+v)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v);$$

$$y_3=-\frac{1}{2}(u+v)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v),$$

gde su u i v realne vrednosti kubnih korena

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}.$$

Ako je $\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$, sva tri korena su realna i imaju vrednosti

$$y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{|p|}\cos\varphi,$$

$$y_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{|p|}\cos(\varphi + 120°),\quad y_3 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{|p|}\cos(\varphi - 120°),$$

gde je

$$\varphi = \frac{1}{3}\arccos\frac{-3\sqrt{3}\,q}{2\,|p|^{3/2}}.$$

Recipročne jednačine trećeg stepena oblika:

1. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ i 2. $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$

imaju jedan očevidan koren. Prva jednačina $x_1 = -1$, druga $x_1 = +1$. Posle toga deobom prve jednačine sa $x+1$, a druge sa $x-1$ dobićemo kvadratne jednačine: $ax^2 + (b-a)x + a = 0$ i $ax^2 + (b+a)x + a = 0$. Rešenje svake od tih jednačina određuje ostala dva korena.

Jednačina četvrtog stepena $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ prvo se svodi na normalni oblik $z^4 + Kz^3 + Lz^2 + Mz + N = 0$. Posle zamene $x = z + \frac{1}{4}K$, gde je x nova promenljiva, jednačina dobiva klasični oblik jednačine četvrtog stepena bez člana sa x^3

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Koreni ove jednačine imaju vrednosti

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}),\quad x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3}),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3}),\quad x_4 = \frac{1}{2}(-\sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}),$$

gde su u_1, u_2, u_3 koreni kubne jednačine

$$u^3 + 2au^2 + (a^2 - 4c)u - b^2 = 0,$$

tzv. *rezolvente*.

Kvadratni koreni $\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2}, \sqrt{u_3}$ se biraju sa takvim znacima, da bude zadovoljena jednačina $\sqrt{u_1}\cdot\sqrt{u_2}\cdot\sqrt{u_3} = -b$.

Bikvadratna jednačina $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ima korene

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})},$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}.$$

Ako je $b^2 - 4ac < 0$, svi su koreni kompleksni sa istim modulom.

Recipročna jednačina četvrtog stepena

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

posle zamene $x + \frac{1}{x} = y$ prelazi u jednačinu

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

Korenima y_1 i y_2 odgovaraju dve kvadratne jednačine

$$x^2 - y_1x + 1 = 0,\quad x^2 - y_2x + 1 = 0$$

iz kojih se određuju četiri korena date jednačina.

Što se tiče algebarskih jednačina opšteg oblika petog i viših stepena, dokazano je (*E. Galois*, 1811 — 1832) da rešenja takvih jednačina ne mogu biti izražena pomoću korena, radikala.

Oslobađanje jednačina od višestrukih korena. Neka je data jednačina (1) u obliku

$$(1)\qquad f(x) = P_n(x) = 0,$$

gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena. Radi oslobađanja te jednačine od višestrukih korena treba izvršiti ove operacije:

1. Izračunati izvod $P_n'(x)$ polinoma $P_n(x)$ po x.

2. Odrediti najveći zajednički delilac funkcija $P_n(x)$ i $P_n'(x)$. Ako takvog delioca nema, jednačina $P_n(x) = 0$ nema višestrukih korena. Ako ima, označimo ga sa $D_1(x)$.

3. Izračunajmo količnik $\frac{P_n(x)}{D_1(x)} = G_1(x)$. Za jednačinu $G_1(x) = 0$ se može tvrditi da nema višestrukih korena, i da

su svi njeni koreni u isto vreme i koreni jednačine $P_n(x)=0$, i da ova nema drugih korena sem korena jednačine $G_1(x)=0$. Postupak oslobađanja jednačine (1) od višestrukih korena je time završen.

Ako sad isti postupak primenimo na jednačinu $D_1(x)=0$, koja u opštem slučaju ima iste višestruke korene kao i jednačina $P_n(x)=0$, ali za jedinicu nižega reda, onda se može uvesti nov polinom $\frac{D_1(x)}{D_2(x)}=G_2(x)$. Jednačina $G_2(x)=0$ ima samo proste korene i to one koji su bili u jednačini $P_n(x)=0$ višestruki, najmanje dvostruki. U naročitim slučajevima to olakšava određivanje višestrukih korena polazne jednačine $P_n(x)=0$.

Razdvajanje korena. Šturmova metoda. Određivanje intervala promenljive x u svakom od kojih se nalazi jedan i samo jedan od realnih korena date jednačine zove se *razdvajanje korena te jednačine.*

Navedimo čuvenu *Šturmovu* (R. Sturm, 1840—1919) *metodu razdvajanja korena.* Ova metoda se odnosi samo na jednačine sa realnim koeficijentima bez višestrukih korena.

Sastavimo tzv. *Šturmov niz funkcija* prema ovim pravilima:

1. Za prvu funkciju niza uzmimo levu stranu date jednačine, tj. $f(x)$.

2. Druga funkcija niza sa oznakom $f_1(x)$ je izvod funkcije $f(x)$, tj. $f_1(x)=f'(x)$.

3. Naredna funkcija $f_2(x)$ je *ostatak, sa suprotnim znakom,* deljenja funkcije $f(x)$ sa $f_1(x)$, tj. funkcija iz jednačine $f(x)=f_1(x)\cdot q_1-f_2(x)$, gde je q_1 količnik, koji ne igra ulogu.

4. Po prethodnom pravilu se određuju i sve ostale funkcije Šturmovog niza, tj.

$$f_{k-1}(x)=f_k(x)\cdot q_k-f_{k+1}(x).$$

Prema tome se može uvek sastaviti konačan niz Šturmovih polinoma

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots$$

Poslednji polinom je konstanta, koja ne može biti jednaka nuli, jer su polinomi $f(x)$ i $f'(x)=f_1(x)$ nedeljivi.

Za određivanje broja realnih korena u intervalu između a i b $(b>a)$ odredimo znake uzastopnih vrednosti članova Šturmovog niza za $x=a$ i označimo sa $S(a)$ broj promena znaka u tom nizu. To isto uradimo za $x=b$ i sa $S(b)$ označimo broj promena znaka novih vrednosti. *Šturmova teorema* glasi:

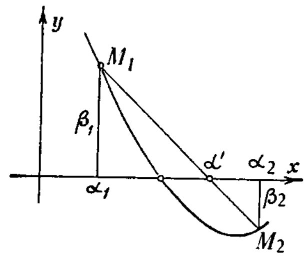
Razlika $S(a)-S(b)$ jednaka je broju realnih korena jednačine $f(x)=0$ u intervalu (a, b).

Razlika $S(-\infty)-S(+\infty)$ daje broj svih realnih korena date jednačine. Ako se u nekom intervalu nalazi više korena, lako je podelom intervala postići izolaciju svakog korena.

6.31. *Približno određivanje korena jednačina*

a. *Približno određivanje realnih korena.* Grafički jednačina $f(x)=0$ se može rešiti crtanjem krive čija je jednačina $y=f(x)$. Tačke preseka te krive sa x osom određuju svojim apscisama proste realne korene jednačine. Tačke dodira odgovaraju dvostrukim ili višestrukim korenima.

Za tačnije određivanje tačke preseka krive sa x osom služi takozvano *regula falsi* (sl. 83). Pretpostavimo da se mogu odrediti koordinate α_1 i $\beta_1=f(\alpha_1)$ tačke M_1 i koordinate α_2 i $\beta_2=f(\alpha)$ tačke M_2 sa obeju strana ose x u blizini traženog korena α. Veličine α_1 i α_2 možemo smatrati kao pogrešne (pogrešni — latinski — falsus) vrednosti korena. Pravilo na osnovu kojeg se iz dve pogrešne vrednosti može naći bolja približna vrednost korena, zove se *regula falsi.* Prema tom pravilu imamo ovu vrednost korena



Sl. 83 — Grafičko određivanje realnih korena. Regula falsi

$$\alpha'=\alpha_1-\beta_1\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\beta_2-\beta_1}=\alpha_2-\beta_2\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\beta_2-\beta_1},$$

izraženu u raznim formama sa otstupanjem bilo od vrednosti α_1, bilo od vrednosti α_2. Ako dobivena vrednost α'

nije dovoljno tačna i $f(\alpha')=\beta'\neq 0$, uzimamo tačku $M'(\alpha', \beta')$ i onu od tačaka M_1 i M_2, koja ima ordinatu suprotnog znaka od ordinate β', i primenjujemo ponovo prethodni postupak za smanjenje intervala u kome se nalazi koren jednačine.

Metoda regula falsi je osnovana na zameni krive u oblasti korena pravom, tetivom i zato se ponekad zove *metoda tetive*.

Njutn je predložio drugu metodu za određivanje približne vrednosti korena jednačine — *metodu tangente*, u kojoj se kriva zamenjuje tangentom, a koren se određuje putem izračunavanja dužine subtangente.

Ako kroz tačku M_1 krive (sl. 83) povučemo tangentu na datu krivu, prema Njutnovoj metodi, apscisa tačke preseka te tangente sa x osom određuje približnu vrednost korena. Ta vrednost, označena sa α'', u našem slučaju se određuje obrascem

$$\alpha''=\alpha_1-\beta_1 : f'(\alpha_1).$$

Pošto je $f'(\alpha_1)<0$, $\alpha''>\alpha_1$ i prema tome je interval (α'', α') uže od prethodnog intervala (α_1, α').

Dve geometrijske metode, metoda tetive i metoda tangente, kombinovane prema karakteru krive u okolini korena, primenjene u računskoj formi daju već na prvim koracima ponavljanja vrlo dobre rezultate.

b. *Grafičko rešavanje jednačine pomoću dve krive.* Pri grafičkom određivanju korena jednačine tražili smo apscisu tačke preseka krive sa x osom. Grafičkom osnovom određivanja korena može služiti i drugo posmatranje korena, kao apscise preseka dve krive. Ako jednačinu krive $f(x)=0$ zamenimo identičnom jednačinom $f_1(x)+f_2(x)\equiv f(x)=0$ i uzmemo u obzir dve krive: $y_1=f_1(x)$ i $y_2=-f_2(x)$, apscisa x_1 tačke preseka $(y_1=y_2)$ zadovoljava jednačinu $f(x)=0$.

Primer. Za kubnu jednačinu $x^3+px+q=0$ imamo $y_1=x^3$, $y_2=-(px+q)$. Prva kriva je *kubna parabola*, ista za sve kubne jednačina, a druga — prava linija (sl. 84). Presek tih linija daje korene $x_1=-4$, $x_2=1$, $x_3=3$ kubne jednačine $x^3-13x+12=0$.

Ta ista metoda se može upotrebiti i za transcendentne jednačine.

Primer. Rešavanje *Keplerove jednačine* $u-e\sin u=w$, gde su: w — srednja anomalija planete, funkcija vremena (data), e — ekscentričnost elipse planete (poznata konstanta) i u

nepoznata ekscentrična anomalija. Na sl. 85 je pokazano rešavanje Keplerove jednačine pomoću preseka dve linije: sinusoide $y_1=e\sin u$ i prave $y_2=u-w$.

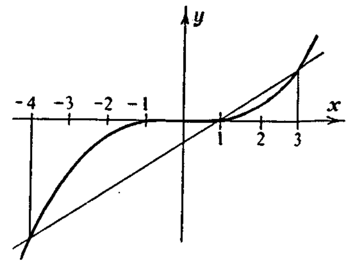
c. *Grafičko određivanje imagi arnih korena jednačina.* Ista metoda određivanja koordinata tačaka preseka dve krive leži u osnovi određivanja imaginarnih korena jednačine.

Pretpostavimo da jednačina $f(x)=0$ nema više realnih korena. Stavimo $x=\xi+\eta i$, gde su ξ i η dva realna broja. Ako ovu vrednost x uvrstimo u datu jednačinu, ona se može zameniti, prema jednačini

$$f(x)=f(\xi+\eta i)=f_1(\xi,\eta)+$$
$$+if_2(\xi,\eta)=0$$

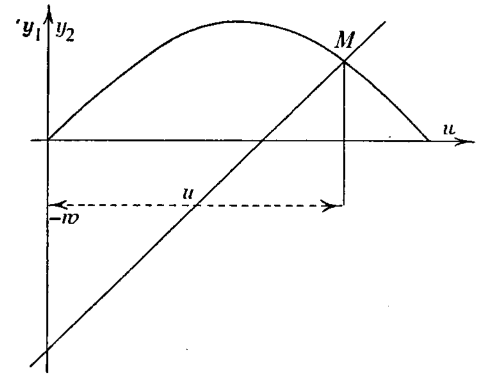
sa dve jednačine

$$f_1(\xi,\eta)=0, \quad f_2(\xi,\eta)=0,$$



Sl. 84 — Grafičko rešavanje kubne jednačine

koje treba da zadovoljavaju ξ i η. Ako ξ i η smatramo kao Dekartove koordinate tačke u ravni, svakoj od prethodnih jednačina odgovara neka linija. Koordinate tačaka preseka tih linija daju realni i imaginarni deo korena jednačine $f(x)=0$.



Sl. 85 — Grafičko rešavanje Keplerove jednačine

Jasno je da se, u opštem slučaju, ta metoda poklapa sa metodom rešavanja sistema od dve jednačine sa dve nepoznate.

U vezi sa tom metodom navedimo dva obrasca za određivanje tačnijih rešenja sistema od dve jednačine

$$f_1(x, y)=0,\ f_2(x, y)=0,$$

kad je poznato približno rešenje x_0, y_0 tog sistema. Imamo za tačnija rešenja x_1, y_1:

$$x_1=x_0-[D_1:D]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\qquad y_1=y_0-[D_2:D]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},$$

gde su: D — Jakobijan sistema, tj.

$$D=\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix},$$

$$\text{i } D_1=\begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & f_1\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & f_2\end{vmatrix}.$$

Ovi obrasci neposredno sleduju iz redova za

$$f_1(x_1, y_1) \text{ i } f_2(x_1, y_1)$$

6.4. Iz Teorije redova

6.41. Konačni redovi

a. *Aritmetička progresija.*

$$a_2=a_1+d,\ \ldots,\ a_i=a_{i-1}+d,\ \ldots,\ a_n=a_{n-1}+d;$$

$d=\text{const.}$ — *razlika progresije.*

$$a_n=a_1+(n-1)d;\ S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\,n}{2}.$$

Od pet veličina a_1, d, n, a_n, S_n nezavisnih je samo tri.

b. *Geometrijska progresija.*

$$a_2=a_1 q,\ a_3=a_2 q,\ \ldots,\ a_i=a_{i-1} q,\ \ldots,\ a_n=a_{n-1} q;$$

$q=\text{const.}$ — *količnik progresije.*

$$a_n=a_1 q^{n-1};\ S_n=\frac{a_n q-a_1}{q-1}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Od pet veličina a_1, q, n, a_n, S_n nezavisnih je samo tri.

c. *Beskonačna geometrijska progresija kao specijalan slučaj.*

$$q<1,\ n\to\infty,\ a_n\to 0,\ q^n\to 0,\ S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}.$$

d. *Aritmetički red k-toga reda.*

Ako ne prve razlike, kao što je to kod aritmetičke progresije, već k-te razlike niza brojeva imaju stalne vrednosti, niz se zove *aritmetički red* k-toga reda. Tako, na primer, niz brojeva

(1) a_i	1		8		27		64		125		216
Δa_i		7		19		37		61		91	
$\Delta^2 a_i$			12		18		24		30		
$\Delta^3 a_i$				6		6		6			

sačinjava aritmetički red trećega reda.

Zbir S_n prvih n članova aritmetičkog reda k-toga reda se određuje ovim obrascem sa binomnim koeficijentima

$$S_n=\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}\Delta a_1+\binom{n}{2}\Delta^2 a_1+\cdots+\binom{n}{k+1}\Delta^k a_1.$$

U našem primeru za prvih pet brojeva imamo

$$S_5=5\cdot 1+10\cdot 7+10\cdot 12+5\cdot 6=225=15^2.$$

Pošto u našem primeru imamo niz kubova prirodnih brojeva, rezultat odgovara obrascu za takav zbir $S_n=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Navedimo nekoliko važnih aritmetičkih redova:

1. $1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

2. $p+(p+1)(p+2)+\cdots+(q-1)+q=$
$=\dfrac{(q+p)(q+1-p)}{2}$;

3. $1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$;

4. $2+4+6\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1)$;

5. $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6. $1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

7. $1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4+n^4=$
$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

8. $1^2+2^2+5^2+\cdots+(2n-3)^2+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

9. $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-3)^3+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

10. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\cdots+n(n+1)^2=$
$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$;

11. $1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}=\dfrac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$;

12. $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}=\dfrac{n-1}{n}$;

13. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{2^{n+1}-(n-2)}{2^n}$.

6.42. Numerički redovi

Od beskonačnog niza određenih brojeva $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ može se sastaviti izraz sa beskrajno velikim brojem sabiraka

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} u_i=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

i uzeti u obzir niz uzastopnih *delimičnih zbirova*

$$S_1=u_1,$$
$$S_2=u_1+u_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{i=1}^{n} u_i.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ako delimični zbir S_n, kad $n\to\infty$, teži 1. određenoj i 2. konačnoj graničnoj vrednosti, koju označimo sa S, tj. $\lim_{n\to\infty} S_n=S$, onda se kaže da je izraz (1) *beskonačan konvergentan numerički red* i da je S njegov *zbir*. Broj u_n je *opšti član reda*.

Ako izraz (1) ne zadovoljava navedene uslove njemu se daje naziv *divergentnog reda*. Sa takvim redom se ne može operisati kao sa određenim brojem.

Red $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots$ je konvergentan, jer je

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Red $1+2+3+\cdots$ je divergentan, jer

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{1}\to\infty.$$

Red $2-2+2-\cdots$ je divergentan, jer su njegove vrednosti 2 i 0.

Košijev neophodan i dovoljan uslov konvergencije reda:

Neophodan i dovoljan uslov da red $u_1+u_2+\cdots$ *bude konvergentan je u tome da se za svaki proizvoljno mali pozitivan broj* ε *može odrediti takav broj* $N(\varepsilon)$ *da je za* $n>N(\varepsilon)$ *i za svako* $p>0$ *ispunjen uslov*

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

Na žalost konkretna primena tog uslova, bez obzira na njegov veliki teorijski značaj, može se vrlo retko iskoristiti.

Neophodan uslov konvergentnosti: *Ako je red konvergentan, njegov opšti član teži nuli.* Taj uslov je neophodan, ali nije dovoljan, jer je, napr. *harmonijski red* $(u_n \to 0)$

$$H=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

divergentan.

Red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se zove *apsolutno konvergentan*, ako je konvergentan i red $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ modula njegovih članova.

Apsolutno konvergentni redovi i redovi sa pozitivnim članovima imaju osobine konačnih redova; na njih se mogu primeniti zakoni — asocijativni, komutativni i distributivni.

Ako je neki red sa pozitivnim i negativnim članovima konvergentan, a red od modula tih članova divergentan, red se zove *relativno konvergentan* ili *semikonvergentan*. Na takve redove se ne mogu primeniti osobine konačnih redova.

Neki dovoljni uslovi konvergentnosti.

Metoda upoređivanja dva reda: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$.

1. Ako za svako $n>N$ (N — konstanta) važi uslov

$$|u_n|<|cv_n|,$$

gde je c proizvoljan broj, koji ne zavisi od n, onda iz konvergencije drugoga reda sleduje konvergencija prvog i iz divergencije prvog sleduje divergencija drugog.

2. Ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{|v_n|}=K\neq 0$ i $|v_n|\neq 0$, onda su oba reda konvergentna ili divergentna.

Naročito su zgodni ovi redovi za upoređenje:

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ — konvergentan, ako je $|q|<1$, i divergentan za $|q|>1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ — konvergentan, ako je $k>1$, i divergentan, ako je $k<1$. Za $k=1$ imamo divergentni harmonijski red.

U slučaju konvergentnosti prvoga reda, drugi red se zove *majoranta* prvog.

Dalamberov kriterijum konvergentnosti prema vrednosti količnika u_{n+1}/u_n:

Ako kod reda sa pozitivnim članovima razmera narednog člana prema prethodnom ima određenu graničnu vrednost i ova je manja od jedinice, red je konvergentan. Ako je veća od jedinice, red je divergentan. Ako je taj količnik jednak jedinici, red može biti ili konvergentan ili divergentan.

Košijev uslov konvergentnosti:

Ako opšti član u_n *reda sa pozitivnim članovima, počev od nekog n, zadovoljava uslov* $\sqrt[n]{u_n}<q<1$, *gde q ne zavisi od n, red je konvergentan. Obratno, ako* $\sqrt[n]{u_n}>1$, *red je divergentan.*

Red se zove *naizmeničan*, ako mu uzastopni članovi menjaju znake.

Lajbnicova teorema: Ako opšti član naizmeničnog reda teži nuli, red je konvergentan.

Integralni uslov konvergentnosti. Ako je $|u_n|=f(n)$, gde je $f(x)$, za svako $x>a$, neprekidna pozitivna opadajuća funkcija $x—a$, tada je red $\sum_{n=1}^{n}|u_n|$ konvergentan pod uslovom da je konvergentan integral sa beskonačnom granicom $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$. i divergentan, kad je taj integral divergentan.

6.43. *Funkcionalni redovi*

Ako su članovi reda funkcije, npr. argumenta x, red se naziva *funkcionalni red.* Ako su članovi funkcionalnog reda stepeni x, red se razvija po stepenima x i naziva se *stepeni red.* Sve vrednosti argumenta, za koje je red konvergentan, sačinjavaju *oblast konvergentnosti* tog reda.

Pravilno konvergentni funkcionalni redovi. Neka su

$$a_n \,(a_n > 0)$$

članovi konvergentnog numeričkog reda

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Za funkcionalni red

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

sa članovima, koji zadovoljavaju, počev od nekog velikog n, za sve vrednosti x u intervalu $[a, b]$ uslove $|u_n(x)| < a_n$, kaže se da je *pravilno* (*regularno*) *konvergentan* za svako x u istom intervalu $[a, b]$.

Važna osobina takvih redova. Zbir regularno konvergentnog reda od neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

Za funkcionalne redove vrlo važnu ulogu igra pojam *ravnomerne* ili *uniformne konvergentnosti.*

Ako posmatramo funkcionalni red za određenu vrednost x-a kao numerički red, opšti Košijev uslov konvergentnosti tog reda traži da bude

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0,$$

za svako $n > N(\varepsilon)$ i za svako p. Pošto broj p može uzimati i beskrajno veliku vrednost, prethodni uslov se može za funkcionalni red formulisati i ovako

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

gde je $R_n(x) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ *ostatak beskonačnog reda.* U slučaju funkcionalnog reda ceo broj $N(\varepsilon)$ može zavisiti i od x, kao parametra numeričkog reda, tj. $N(\varepsilon) = N(\varepsilon, x)$.

Funkcionalni konvergentni red je ravnomerno ili uniformno konvergentan u intervalu $[a, b]$, *ako za svako* $\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ *postoji takav broj* $N(\varepsilon)$ *nezavisan od* x *da bude*

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

za svako $n > N(\varepsilon)$ *i za svako* x *iz intervala* $[a, b]$.

Za utvrđivanje ravnomerne konvergentnosti reda može poslužiti ova *Vajerštrasova teorema*:

Ako su za sve vrednosti x u datom intervalu apsolutne vrednosti članova funkcionalnog reda manje od vrednosti članova konvergentnog reda sa pozitivnim konstantnim članovima, prvi red je ravnomerno konvergentan.

Ako je u intervalu $[a, b]$ funkcionalni red od neprekidnih članova u tom intervalu ravnomerno konvergentan, njegov zbir je takođe neprekidna funkcija u tom intervalu.

Ako je u intervalu $[a, b]$ red $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ ravnomerno konvergentan, onda je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

tj. takav red se može integrisati član po član.

Isto to važi i za diferenciranje ravnomerno konvergentnog reda za unutrašnje vrednosti oblasti konvergentnosti (a, b), tj.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x);$$

prema tome se takav red može i diferencirati član po član.

Istom cilju utvrđivanja ravnomerne konvergentnosti reda može poslužiti i ova *Abelova teorema*:

Funkcionalni red sa opštim članom $u_n(x) = a_n v_n(x)$ je ravnomerno konvergentan pod uslovom: 1. da su a_n konstante sa konvergentnim zbirom $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ i 2. da funkcije $v_n(x)$ ne rastu, tj.

$$v_1(x) \geqslant v_2(x) \geqslant v_3(x) \geqslant \ldots \geqslant v_n(x) \geqslant \ldots,$$

i ostaju uvek manje ili jednake od nekog pozitivnog broja M.

6.431. Stepeni redovi

Red

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

gde su $a_0, a_1, a_2, \ldots$ konstante, zove se *stepeni red.*

I red oblika

$$(2) \qquad a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \cdots +, \; a_n(x-\alpha)^n + \cdots,$$

gde je α konstanta, takođe je stepeni red, jer se smenom $x - \alpha = y$ svodi na red (1).

Za stepene redove važe ove *Abelove teoreme*:

I. Ako je red (1) konvergentan za neku vrednost ξ argumenta x, on je apsolutno konvergentan za svako x, za koje $|x|<|\xi|$. I ako je red divergentan za ξ, on je divergentan za svako x, za koje $|x|>|\xi|$.

Kao zaključak: postoji određeni broj $R \geqslant 0$, koji se zove *poluprečnik konvergentnosti reda* (1), sa ovim osobinama — za svako x, za koje $|x|<R$, red (1) je apsolutno konvergentan, a za svako x, za koje $|x|>R$, red (1) je divergentan.

Ako je $R=0$, red divergira za svako $x \neq 0$; sa druge strane, ako je $R=\infty$ red apsolutno konvergira za svako x.

II. Red (1) konvergira ne samo apsolutno, već i ravnomerno u intervalu (a, b) ako je $-R<a<b<R$, gde je R poluprečnik konvergentnosti reda. Ako red konvergira i za $x=R$ ili $x=-R$, on ravnomerno konvergira i u intervalima (a, R) ili $(-R, b)$.

Određivanje poluprečnika konvergencije R može da se vrši pomoću ovih obrazaca

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{i} \quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Na granicama tako određenog intervala red može biti konvergentan i divergentan. Određivanje konvergentnosti zahteva tada specijalno proučavanje konkretnog reda.

Stepeni red (1) ravnomerno konvergentan u intervalu $-R<a<b<R$ je neprekidna funkcija u tom intervalu.

Funkcija, koju predstavlja stepeni red u oblasti njegove konvergentnosti, ima u toj oblasti izvode svih redova.

Red (1) ravnomerno konvergentan u intervalu

$$-R<a<b<R$$

je neprekidna funkcija u tom intervalu.

Stepeni redovi imaju još jednu vrlo važnu osobinu — jedinstvenost predstavljanja funkcije stepenim redom, ako je to predstavljanje moguće, tj. ne postoje dva stepena reda za jednu istu funkciju.

Ta osobina ističe naročitu važnost onih algoritama koji daju mogućnost izražavati funkcije u obliku stepenih konvergentnih redova. Funkcije, tako izražene, imaju naziv analitičkih funkcija (u našem slučaju) realne promenljive. Teorija takvih funkcija ima naročitu vrednost kao deo Teorije funkcija kompleksne promenljive.

6.432. *Tejlorov i Maklorenov red*

Na str. 94—95 ove knjige naveli smo dva obrasca: Tejlorov i Maklorenov.

1. *Tejlorov obrazac*

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n$$

čiji je ostatak $R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$ daje mogućnost izračunati tačno $f(x+h)$, ako su poznate ove veličine: 1. Priraštaj argumenta h, 2. $f(x)$ i vrednosti uzastopnih izvoda $f'(x), f''(x), \ldots$ i 3. tzv. ostatak R_n za određenu vrednost θ u granicama $0<\theta<1$.

2. *Maklorenov obrazac*

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+$$
$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(0)+R_n,$$

gde je

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) \text{ sa } 0<\theta<1.$$

Ako funkcija $f(x)$ ima izvode svih redova i

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

Tejlorov obrazac, sa drugim oznakama, daje *Tejlorov beskonačni red*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots +$$

$$+ (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \cdots$$

U sličnoj formi možemo napisati i *Maklorenov beskonačni red*

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \cdots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \cdots$$

Tejlorov i Maklorenov red daju one algoritme koji se u praksi najčešće iskorišćuju za izračunavanja približnih vrednosti funkcija. Ostatak R_n daje vrednost greške pri tim približnim računima.

6.433. Tablica nekih poznatih redova

1. $$(1+x)^p = 1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 +$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Za $|x| < 1$ *binomijalni red* je konvergentan. Za $x = 1$ imamo slučajeve: $p > 0$ — apsolutno konvergira, $-1 < p < 0$. — uslovno konvergira, $p \leqslant -1$ — divergira; za $x = -1$ imamo dva slučaja: $p > 0$ — apsolutno konvergira, $p < 0$ — divergira.

2. $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots (-1 < x < +1);$$

3. $$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots (x > 1 \text{ i } x < -1);$$

4. $$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 +$$

$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots = 1 + \frac{1}{2}x -$$

$$- \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots (-1 \leqslant x \leqslant +1);$$

5. $$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 -$$

$$- \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 - \cdots (1 - \leqslant x \leqslant +1).$$

6. $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 +$$

$$+ \frac{35}{128}x^4 - \cdots, (-1 < x \leqslant +1);$$

7. $$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4 -$$

$$- \frac{91}{729}x^5 + \cdots, (-1 < x \leqslant +1);$$

8. $$\sqrt[q]{(1+x)^p} = 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{q\cdot 2q}x^2 +$$

$$+ \frac{p(p-q)(p-2q)}{q\cdot 2q\cdot 3q}x^3 + \cdots,$$

gde je $p > 0$, $q > 0$, $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$;

9. $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots;$$

9.bis $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2{,}7182818284\cdots;$

10. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots;$

10.bis $\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = 0{,}3678794412\cdots;$

11. $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1}x + \frac{(\ln a)^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots, (a>0);$

12. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$

$(-1 < x \leqslant +1);$

13. $\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots),$

$(-1 < x < +1);$ 13.bis $\ln 2 = 0{,}6931471806\cdots;$

14. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots),$

$(-1 < x < +1);$

15. $\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \cdots\right),$

$(x < -1$ i $x > +1).$

16. $\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right],$

$(x>0);$

17. $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots,$

$(0 < x < 2);$

18. $\ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots,$

$\left(x > \frac{1}{2}\right);$

19. $\ln(a+x) = \ln a + 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \right.$

$\left. + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \cdots\right], (a>0;\ x>-a);$

20. $\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} -$

$- \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots;$

21. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots;$

22. $\mathrm{tg}\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots,$

$\left[|x| < \frac{\pi}{2}\right];$

23. $\mathrm{cotg}\, x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 - \cdots,$

$[|x| < \pi,$ sem $x = 0];$

24. $\mathrm{arc\,sin}x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$

$[|x| < 1];$

25. $\mathrm{arc\,tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,\ [|x| <| 1];$

26. $\mathrm{sinh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots;$

27. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots;$

28. $\operatorname{tgh} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \ldots, \left[|x| < \frac{\pi}{2} \right];$

29. $\operatorname{Ar\,sinh} x = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} +$

$+ \ldots [|x| < 1];$

30. $\operatorname{Ar\,tgh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots [|x| < 1];$

31. $\ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} -$

$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots, |x| < 1.$

Primedba. Pri maloj vrednosti promenljive x, koju tada označavamo sa ε, napisani redovi svojim prvim delom, koji sadrži i član sa najnižim stepenom $\varepsilon - a$, daju prvu približnu vrednost odgovarajuće funkcije. Npr.:

$$(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon, \quad \sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \sin \varepsilon \approx \varepsilon, \quad \cos \varepsilon \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Uopšte: $f(\varepsilon) \approx f(0) + f'(0)\,\varepsilon$, pri čemu greška leži između

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 f''(0) \text{ i } \frac{1}{2}\varepsilon^2 f''(\varepsilon).$$

$$f(\varepsilon, \eta) \approx f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=0}} \varepsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=0}} \eta.$$

6.5. Funkcionalni redovi specijalnih funkcija

Pri proučavanju funkcija vezanih za konkretne, naročito fizičke, probleme, zgodno je služiti se funkcionalnim redovima

čiji su članovi *specijalne funkcije* koje su svojom suštinom vezane za prirodu problema. Tako je za proučavanje oscilatornih procesa prirodno uzimati *trigonometrijske funkcije* koje sinusoidama i kosinusoidama upadljivo prikazuju oscilatorni karakter pojave.

Ovde se, prvo, daju opšti pojmovi o izražavanju funkcija pomoću funkcionalnih redova specijalnih funkcija, a zatim se iznosi nekoliko stavova o trigonometrijskim redovima, naročito o tzv. *Furijeovim redovima.*

Neka je $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ beskonačan niz nekih specijalnih funkcija.

Sastavimo zbir u obliku

$$S_n = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \ldots + c_n \varphi_n,$$

gde su $c_0, c_1, \ldots, c_n$ nepoznati konstantni koeficijenti, i uzmimo za približnog zamenika date funkcije $f(x)$, koju proučavamo, zbir S_n, tj. stavimo

$$(1) \qquad f(x) \approx S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k.$$

Odredimo koeficijente $c_0, c_1, \ldots, c_n$ iz uslova da približna vrednost S_n bude najbliža funkciji $f(x)$. Za *meru odstupanja* uzmimo izraz

$$(2) \qquad \delta_n^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2\, dx,$$

koji se zove *srednje kvadratno odstupanje zbira* $S_n(x)$ *od funkcije* $f(x)$ *u intervalu* $[a, b]$.

Primetimo da se *mera odstupanja* upotrebljava i u drugim oblicima, npr. u tzv. *uopštenom obliku:*

$$\delta_n^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x)\,[f(x) - S_n(x)]^2\, dx,$$

gde je $p(x)$ tzv. *težina kvadrata razlike u zavisnosti od* x.

Konstante c_k iz (1) se određuju iz uslova da $\delta^2{}_n$ ima minimum. Zaustavimo se na $\delta^2{}_n$ u obliku (2). Određivanje tih konstanata znatno se uprošćava, ako se upotrebi *metoda specijalnih funkcija* uzetih u naročitoj formi *ortogonalnih i normiranih* funkcija.

1. *Funkcije* sistema $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots, \psi_m, \ldots$ su *ortogonalne*, ako svaki par funkcija zadovoljava *uslov ortogonalnosti* $\int_a^b \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = 0$, $(m \neq n)$ (analogon skalarnog proizvoda!).

2. Iste *funkcije* su *normirane* pod uslovom

$$\int_a^b [\psi_n(x)]^2\,dx = 1 \text{ (analogon jediničnog vektora!).}$$

Ako sastavimo funkciju S_n pomoću ortogonalnih i normiranih funkcija ψ_k, tj. stavimo

$$f(x) \approx S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \psi_k,$$

nepoznate konstante c_k se određuju prema pokazanoj metodi iz jednačina

$$c_k = \int_a^b f(t)\,\psi_k(t)\,dt$$

i zovu se *generalisani Furijeovi koeficijenti funkcije* $f(x)$ *u odnosu na sistem funkcija* ψ_k. Red $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k$ tada se zove *generalisani Furijeov red funkcije* $f(x)$ *u odnosu na* sistem funkcija ψ_k. Sa Furijeovim koeficijentima mera odstupanja ima ovu najmanju vrednost

$$\delta_n^2 = \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b [f(x)]^2\,dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\right\}$$

i prema tome možemo napisati ovu *Beselovu* (*F.W. Bessel*, 1784 — 1846) *nejednakost*

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 < \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Kad δ_n^2 teži nuli imamo ovu jednakost

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2,$$

koja se zove *jednačina potpunosti* (ili *zatvorenosti*) *za funkciju* $f(x)$ *u odnosu na sistem funkcija* ψ_k *na intervalu* $[a, b]$.

Ako funkcije ψ_k sačinjavaju zatvoren sistem funkcija za funkciju $f(x)$, a i sama funkcija $f(x)$ zadovoljava određene uslove, onda osnovni red $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k$ konvergira apsolutno i ravnomerno i teži datoj funkciji $f(x)$.

Primenimo prethodne opšte rezultate, u skraćenoj formi, na tzv. *trigonometrijske redove*.

6.51. Trigonometrijski redovi

U Matematici, a isto tako u Mehanici, Astronomiji, Fizici i drugim naukama vrlo važnu ulogu igraju *periodične funkcije*, koje zadovoljavaju uslov $f(z+K) = f(z)$ za svaku vrednost z datog područja, gde je K stalan broj — *period periodične funkcije* sa argumentom z.

Mesto argumenta z uvek možemo zamenom $z = x\,\dfrac{K}{2\pi}$ uvesti takav argument x da transformisana funkcija bude periodična funkcija sa periodom 2π. Pošto je periodičnu funkciju $f(x)$ dovoljno proučavati samo u intervalu jednog perioda, izabraćemo za taj interval razmak od $-\pi$ do $+\pi$.

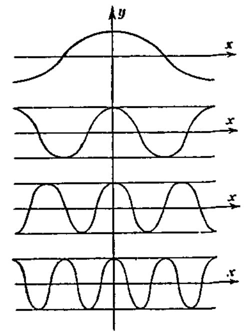
Najglavnija primena periodičnih funkcija je u proučavanju oscilatornih procesa, specijalno *harmonijskog kretanja*. Harmonijskoj oscilaciji sa periodom 2π odgovara jedna od jednačina

$$(1) \quad y = a_1 \cos x, \quad y = b_1 \sin x,$$

ili jednačina

$$y = a \sin(x + \alpha), \quad y = a \cos(x + \alpha),$$

gde su a_1, b_1, a i α konstante; a_1, b_1, a—*amplitude oscilacije*, a α—*početna faza* za $x = 0$. Ako upotrebimo terminologiju Akustike jednačinama (1) odgovara *glavni* ili *osnovni ton* zvuka. *Period glavnog tona* zove se *primitivni period*. Ako uzmemo jednačine $y = a_k \cos kx$, $y = b_k \sin kx$, gde su a_k i b_k bilo koje konstante i k prirodni broj, svakoj od



Sl. 86 — Grafici osnovnog i tri uzastopna viša tona sa istom amplitudom

tih jednačina odgovara takođe harmonijska oscilacija. Period tih oscilacija, zajedno sa osnovnom, za $k=1,2,3,4,\ldots$ redom ima vrednost: $2\pi, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \ldots, \frac{2\pi}{k}, \ldots$ Svaka od tih oscilacija ($k>1$) odgovara *višem tonu.* Na slici 86 predstavljeni su grafici osnovnog i viših tonova sa istom amplitudom za funkciju kosinusa.

Za primenu trigonometrijskih funkcija kao specijalnih ortogonalnih i normiranih funkcija uzmimo ovaj niz funkcija za interval $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \ldots.$$

Te funkcije su ortogonalne pošto su ove jednačine tačne

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos x\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin x\, dx = 0, \ldots, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos k_1 x \cos k_2 x\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k_1 x \sin k_2 x\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin k_1 x \sin k_2 x\, dx = 0, \text{ za } k_1 \neq k_2.$$

One su i normirane, tj.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx = 1, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right)^2 dx = 1, \ldots,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\right)^2 dx = 1, \ldots.$$

Prema tome trigonometrijski polinom n-toga reda se može napisati ovako

$$\sqrt{\pi} \cdot S_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

gde su α_0, α_k, β_k — neodređeni proizvoljni koeficijenti. Taj red se pretvara u beskonačan trigonometrijski red za ortogonalne i normirane funkcije $\cos x$ i $\sin x$, kad n teži beskonačnosti.

Primenimo sad dobijeni obrazac za razvijanje date funkcije $f(x)$ u red po specijalnim trigonometrijskim funkcijama, tj. stavimo

$$\sqrt{\pi} f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Za određivanje α_0 levu i desnu stranu ovog obrasca množimo sa $\frac{1}{\pi}$ i integralimo u granicama od $-\pi$ do $+\pi$. Prema osobinama ortogonalnih i normiranih funkcija dobivamo ovaj rezultat: $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = \alpha_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx = \alpha_0$; na sličan način se određuju i ostali koeficijenti, npr.

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx.$$

Ako sad uvedemo druge koeficijente a_0, a_k, b_k obrascima

$$\alpha_0 = a_0 \sqrt{\pi}, \quad \alpha_k = a_k \sqrt{\pi}, \quad \beta_k = b_k \sqrt{\pi}$$

sa vrednostima

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx,$$

u rezultatu se dobiva ovaj beskonačan red

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

koji se zove *Furijeov red* (J.B.J. Fourier, 1768 — 1830).

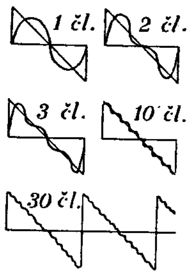
Za određivanje konvergentnosti tog reda služi *Dirihleova* (P.G. Lejeune — Dirichlet, 1805 — 1859) *teorema*, koja glasi:

Ako funkcija $f(x)$, data u intervalu $(-\pi, +\pi)$, zadovoljava u tom intervalu *Dirihleove uslove* (u primedbi), onda Furijeov red konvergira u celom intervalu i njegov zbir je jednak:

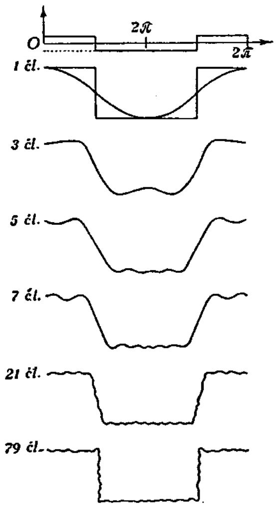
1. funkciji $f(x)$ u svima tačkama neprekidnosti te funkcije u unutrašnjosti intervala,

2. poluzbiru $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ u svim prekidnim tačkama,

3. poluzbiru $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ na kraju intervala, tj. za $x=-\pi$ i $x=+\pi$.



Sl. 87 — Aproksimativne krive Furijeovog reda. Prvi primer



Sl. 88 — Aproksimativne krive Furijeovog reda. Drugi primer

Primedba. Data funkcija $f(x)$ ili je neprekidna ili ima konačan broj prekida i to takvih, da funkcija levo i desno od prekida ima konačne granične vrednosti čije su oznake

$f(x-0)$ i $f(x+0)$. To su tzv. *prekidne tačke prvoga reda.* Interval$(-\pi, +\pi)$ može se podeliti na konačan broj takvih intervala u svakom od kojih funkcija ostaje monotona. Na granicama intervala funkcija ima granične vrednosti, koje mogu biti različite, ali zbir Furijeovog reda za te tačke mora biti isti.

Razlaganje periodičnih pojava pomoću Furijeovog reda zove se *harmonijska analiza.* Na slikama 87 i 88 dajemo primer razlaganja dve funkcije. Za takvo razlaganje ima više metoda. Jednu dajemo u našoj knjizi „Elementi Više matematike." III. str. 118.

INDEX RERUM

(Brojevi označavaju strane)

Anton Bilimović

VIŠA MATEMATIKA

*

Tehnički urednik: Jugoslav Bogdanović

*

Izdanje: Novinsko-izdavačko preduzeće „Tehnička knjiga“

Beograd, 7. juli 2o/I

*

Štampa: Beogradski grafički zavod

Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

*

Štampanje završeno juna 1963.